

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .
- 5p a) Să se calculeze derivata funcției  $f$ .
  - 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
  - 5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \leq -4$  pentru orice  $x < -1$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$ .
- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $\int x f(x) dx$ .
  - 5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$   
 $f(0) = 0; f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-4$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$
		max	min		

c)  $f(x) \leq f(-2) = -4, \forall x < -1$   
 (din b)

② a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + e^x) = e^0 = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + 1) = 1$   
 $f(0) = 1$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f$  continuă în  $x_0 = 0$

dar  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  și  $f$  cont. în  $x_0 = 0$  deci  $f$  cont. pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b)  $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x(x^2 + e^x) dx = \int_0^1 (x^3 + x e^x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x e^x dx =$   
 $= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \int_0^1 x e^x dx$   
 $I_1 = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 e^x dx = (e^x - e^x) \Big|_0^1 = e^x(x-1) \Big|_0^1$   
 $f(x) = x; f'(x) = 1; g'(x) = e^x; g(x) = e^x$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$I = \left[ \frac{x^4}{4} + e^x(x-1) \right]_0^1 = e^0(-1) - \frac{1}{4} - e^1(-2) = -1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{e} = -\frac{5}{4} + \frac{2}{e}$

c)  $\text{Vol}(C_g) = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + x \right) \Big|_0^1$   
 $= \pi \left( \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \right) = \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 \right) = \pi \cdot \frac{3+8+6}{6} = \frac{17\pi}{6}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - e^{-x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

5p b) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Să se calculeze  $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$ , unde  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f'(x) - f''(x)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$  și  $F(x) = (x-1)e^x$ .

5p a) Să se verifice că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$ , pentru orice  $x > 1$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2$   
 $f'(x) = e^x + e^{-x}$

b)  $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  crescătoare pe  $\mathbb{R}$

c)  $f''(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x}$

$g(x) = f'(x) - f''(x) = e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x} = 2e^{-x}$

$S = 2e^0 + 2e^{-1} + \dots + 2e^{-2009} = 2\left(1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^{2009}}\right)$

$\therefore 1; \frac{1}{e}; \dots; \frac{1}{e^{2009}} \quad b_1 = 1; q = \frac{1}{e}; n = 2010$

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}; S_{2010} = \frac{1\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{2010} - 1\right]}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{1 - e^{-2010}}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{1 - e^{-2010}}{\frac{1 - e}{e}} = \frac{1 - e^{-2010}}{1 - e}$

$S = 2S_{2010} = \frac{2(1 - e^{-2010})}{1 - e}$

② a)  $F$  derivabilă pe  $\mathbb{R}$ ;  $F'(x) = (x-1)e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x)$   
 deci  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

b) aria  $(r_f) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = (x-1)e^x \Big|_0^1 = (1-1)e - (0-1)e^0 = 1$

c)  $\int_1^x \frac{f(t) \cdot f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \int_1^x \left[ \frac{f'(t)}{f(t)} \right]' dt = \frac{f'(t)}{f(t)} \Big|_1^x = \frac{1}{x} - \frac{1}{1} = \frac{1+x}{x} - 2 = \frac{x+1}{x} - 2, \forall x > 1$

$= \frac{F(t)}{f(t)} \Big|_1^x = \frac{(1+t)e^t}{te^t} \Big|_1^x = \frac{1+t}{t} \Big|_1^x = \frac{1+x}{x} - \frac{1+1}{1} = \frac{1+x}{x} - 2 = \frac{x+1}{x} - 2, \forall x > 1$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $3^{\sqrt{5}} \leq 5^{\sqrt{3}}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2+x, & x > -1 \end{cases}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției

$g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$ .

$$\textcircled{1} a) f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, \forall x \in (0, +\infty)$$

$$b) f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2; \quad f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

$x$	0	$e^2$	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$		$\nearrow \frac{2}{e}$	$\searrow$
		max	

$$c) 3 \in (0, e^2); \quad 5 \in (0, e^2); \quad 3 < 5 \Rightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5} \ln 3 < \sqrt{3} \ln 5 \Rightarrow \ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}} \Rightarrow 3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$$

$\textcircled{2} a) f$  cont. pe  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} e \cdot e^x = e \cdot e^{-1} = 1 \\ \lim_{x < -1} f(x) &= \lim_{x < -1} (2+x) = 2-1 = 1 \\ \lim_{x > -1} f(x) &= \lim_{x > -1} (2+x) = 2-1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 1 \Rightarrow f \text{ cont. în } x_0 = -1 \text{ deci}$$

$f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

$$b) \text{Vol}(C_g) = \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2+x)^2 dx = \pi \int_0^2 (4+4x+x^2) dx = \pi \left( 4x + \frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \pi \left( 8 + 8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{56\pi}{3}$$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programă M2

$$c) \int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{x \cdot e \cdot e^x}{e} dx + \int_{-1}^0 \frac{x(2+x)}{e} dx = \int_{-2}^{-1} x e^x dx + \int_{-1}^0 \frac{2x+x^2}{e} dx = (x e^x - e^x) \Big|_{-2}^{-1} + \left( \frac{2}{e} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{e} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = -e^{-1} - e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{3e} = -\frac{2}{e} + \frac{2}{e} + \frac{1}{3e} - \frac{1}{e} = \frac{-6e + 9 + e - 3e}{3e^2} = \frac{-8e + 9}{3e^2}$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se arate că  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și crescătoare pe  $[0, +\infty)$ .
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x) dx$ .
- 5p b) Să se determine numărul real  $a > 1$  astfel încât  $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx$ .

① a)  $f'(x) = (x + e^{-x})' = 1 - e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$ ;  $f(0) = 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\searrow$ $1$ $\nearrow$ min	

c)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

}  $\Rightarrow y = x$   
asimptotă oblică spre  $+\infty$

② a)  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 1 = x^3 + 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x^3 + 3x) dx = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

b)  $\int_1^a (g(x) - x^3) e^x dx = \int_1^a (x^3 + 3x - x^3) e^x dx = 3 \int_1^a x e^x dx = 3(xe^x - e^x) \Big|_1^a$

$= 3e^x(x-1) \Big|_1^a = 3e^a(a-1) - 3e(1-1) = 3e^a(a-1)$

$3e^a(a-1) = 6e^a \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow \underline{a=3}$

c)  $\int_0^1 (3x^2 + 3)(x^3 + 3x)^{2009} dx$

$t(x) = x^3 + 3x = t$

$t'(x) dx = (3x^2 + 3) dx = dt$

$F(t) = \int t^{2009} dt = \frac{t^{2010}}{2010} + C$

$y = \frac{(x^3 + 3x)^{2010}}{2010} \Big|_0^1 = \frac{4^{2010}}{2010}$

$\int_0^1 (3x^2 + 3)g^{2009}(x) dx = \frac{4^{2010}}{2010}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$ .

5p a) Să se calculeze  $f(0) + f'(0)$ .

5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(0;1)$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $[0; +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x^2}$ .

5p a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p b) Folosind faptul că  $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze că  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$ .

5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f(-x)$ .

① a)  $f'(x) = 2009x^{2008} - 2009$   
 $f(0) + f'(0) = (2009 - 1) + (-2009) = -1$

b)  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

c)  $f''(x) = (2009x^{2008} - 2009)' = 2009 \cdot 2008 \cdot x^{2007} \geq 0, \forall x \in [0; +\infty)$   
 $f''(x) \geq 0, \forall x \in [0; +\infty) \Rightarrow f$ -convexă pe  $[0; +\infty)$

② a)  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ ;  $\text{Aria}(r_f) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + e^{-x}) dx =$   
 $= \left( \frac{x^2}{2} - e^{-x} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{2} - e^{-1} \right) - (-e^0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{3e-2}{2e}$

b)  $x^2 + e^{-x^2} \geq 1 \Rightarrow e^{-x^2} \geq 1 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$

c)  $g(x) = (x + e^{-x}) + (-x + e^x) = e^x + e^{-x}; x \in [0, 1]$

$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) dx =$

$= \pi \left( \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left[ \left( \frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} \right) - \left( \frac{e^0}{2} - \frac{e^0}{2} \right) \right] =$

$= \frac{\pi}{2} (e^2 - e^{-2} + 4)$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5p b) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$ , pentru orice  $x \in [0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x + 1$ .

5p a) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x}{x(1+\frac{1}{x})} + \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} \right] = 1+1=2$

b)  $f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}, \forall x \geq 0$

c)  $f'(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$  str. crescăt. pe  $[0, +\infty)$

$x$	0			$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗ ↗		2

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [0, +\infty)$$

② a)  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  - primitivă a funcției  $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$   
 $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x) = x^2 + e^x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

b)  $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 (x^3 + x e^x + x) dx = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 x e^x dx =$   
 $= \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + x e^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x e^x - e^x \right) \Big|_0^1 =$   
 $= \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + e - e \right) + e^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{4}$

c)  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e [F(\ln x)]' dx = F(\ln x) \Big|_1^e = F(\ln e) - F(\ln 1) =$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$= F(1) - F(0)$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + e^x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + x$$

$$\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \left( \frac{x^3}{3} + e^x + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + e + 1 - 1 = e + \frac{1}{3}$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + x^2$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .  
 5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  nu are asimptotă către  $+\infty$ .  
 5p c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_1^e f'(x) dx$ .  
 5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $[1, +\infty)$ .  
 5p c) Să se determine numărul real  $a \in (1, e^2)$  astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$ , dreptele de ecuații  $x = a$  și  $x = e^2$ , să fie egală cu  $\ln \frac{3}{2}$ .

- ① a)  $f'(x) = e^x + 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$   
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e + 2$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2) = +\infty \Rightarrow \nexists$  asimptotă orizontală către  $+\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{1} = +\infty \Rightarrow \nexists$  asimpt. oblică spre  $+\infty$   
 c)  $f''(x) = (e^x + 2x)' = e^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbb{R}$

- ② a)  $\int_1^e f'(x) dx = f(x) \Big|_1^e = \frac{1}{x(1 + \ln x)} \Big|_1^e = \frac{1}{e(1 + \ln e)} - \frac{1}{1(1 + \ln 1)} = \frac{1}{e(1+1)} - \frac{1}{1+0} = \frac{1}{2e} - 1 = \frac{1-2e}{2e}$   
 b)  $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \ln |1 + \ln x| + C$   
 $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)} > 0, \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow F$  crescătoare pe  $[1, +\infty)$   
 c)  $\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_a^{e^2} f(x) dx = \ln |1 + \ln x| \Big|_a^{e^2} = \ln(1 + \ln e^2) - \ln(1 + \ln a)$   
 $= \ln(1 + 2) - \ln(1 + \ln a) = \ln \frac{3}{1 + \ln a}$   
 $\ln \frac{3}{1 + \ln a} = \ln \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{1 + \ln a} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \ln a = 2$   
 $\ln a = 1 \Rightarrow a = e$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

5p b) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty) \setminus \{e\}$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f + g$ .

5p b) Să se arate că  $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$ .

5p c) Folosind eventual faptul că  $2ab \leq a^2 + b^2$ , pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze că

$$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$

① a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \frac{1 + \ln 1}{1 - \ln 1} = \frac{1}{1} = 1$

b)  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) - (1 + \ln x) \cdot (-\frac{1}{x^2})}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x + 1 + \ln x}{x(1 - \ln x)^2} =$

$$= \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}, \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{e\}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y = -1$  asimptotă orizontală către  $+\infty$

② a)  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int (e^x + \frac{1}{x}) dx = e^x + \ln x + C$

b)  $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \int_1^2 (e^{2x} + \frac{1}{x^2}) dx = \left( \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 =$

$$= \left( \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} e^2 - 1 \right) = \frac{e^4 - 1 - e^2 + 2}{2} = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$$

c)  $2e^x \cdot \frac{1}{x} \leq e^{2x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow 2 \int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \int_1^2 (e^{2x} + \frac{1}{x^2}) dx =$   
 $= \frac{e^4 - e^2 + 1}{2} \Rightarrow \int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5p a) Pentru  $a=1, b=c=0$ , să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5p b) Să se verifice că  $f'(0) - f(0) = b$ .

5p c) Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  și  $f''(0) = 4$ .

2. Se consideră integralele  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x+1} dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se calculeze  $I_1$ .

5p b) Folosind, eventual, faptul că  $x^2 \leq x$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ , să se demonstreze că  $I_2 \leq I_1$ .

5p c) Să se demonstreze că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1x^2 + 0x + 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot x^2 = +\infty$

b)  $f'(x) = e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b) = e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b)$   
 $= e^x[ax^2 + (b+2a)x + (b+c)]$

$f'(0) - f(0) = e^0(b+c) - e^0 \cdot c = b+c-c = \underline{b}$

c)  $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 4 \end{cases}$   $f'(x) = e^x[ax^2 + (b+2a)x + (b+c)] + e^x[2ax + (b+2a)] = e^x[ax^2 + (b+4a)x + (2a+2b+c)]$

$\begin{cases} c = 0 \\ b+c = 1 \\ 2a+2b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

② a)  $I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1$

b)  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = I_1 \Rightarrow I_2 \leq I_1 \forall x \in [0, 1]$

c)  $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^n+1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n+2}{x+1} dx =$   
 $= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + 2 \ln|x+1| \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{n+1} + 2 \ln 2 \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2 \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

SUBIECTUL III (30p)

(30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$
- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Să se calculeze  $f'(0) + f'(2)$ .
- 5p c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe  $(-\infty; 1)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$  și  $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$ .
- 5p a) Să se verifice că funcția  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)g(x) dx$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 f'(x)g'(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ .

① a) 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = 1$$

b) 
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x > 1 \\ -2x + 1; & x < 1 \end{cases} \quad f'(0) + f'(2) = 1 + 4 - 1 = 4$$

c) 
$$f'(x) = -2x + 1; \quad x \in (-\infty, 1); \quad f''(x) = (-2x + 1)' = -2 < 0, \quad \forall x \in (-\infty, 1)$$
  

$$f''(x) < 0, \quad \forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f - \text{concavă pe } (-\infty, 1)$$

② a) 
$$g'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot e^x - (e^{2x} - 1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2e^{3x} - e^{3x} + e^x}{e^{2x}} = \frac{e^{3x} + e^x}{e^{2x}}$$
  

$$= \frac{e^x(e^{2x} + 1)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} = f(x) \Rightarrow g - \text{primitivă a lui } f$$

b) 
$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 g(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right)^2 \Big|_0^1$$
  

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e^2 - 1}{e} \right)^2 - \left( \frac{e^0 - 1}{e^0} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)^2$$

c) 
$$\int_0^1 f'(x)g'(x) dx = \int_0^1 f'(x)f(x) dx = \int_0^1 f'(x) \cdot g(x) dx$$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot e^x - (e^{2x} + 1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2e^{3x} - e^{3x} - e^x}{e^{2x}} = \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}}$$
  

$$= \frac{e^x(e^{2x} - 1)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$ .
- 5p b) Să se verifice că  $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$ .
- 5p c) Să se arate că șirul care are termenul general  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$ ,  $n \geq 1$  este o progresie aritmetică cu rația 1.

① a)  $f'(x) = \frac{1'x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{x^4} + \frac{1'(x+1)^2 - 1 \cdot [(x+1)^2]'}{(x+1)^4} = \frac{-2x}{x^4} + \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} =$

$= -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$   
 b)  $f'(x) = -2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right) < 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  strict descrescătoare pe  $(0, +\infty)$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{2x^3}{x^3} - \frac{2x^3}{(x+1)^3} \right] = -2 - 2 = -4$

② a)  $\int_1^e \left( \frac{\ln x}{x} + x - \frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_1^e x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2 - 1}{2}$

b)  $\int_1^e \left( \frac{\ln x}{x} + x \right) dx = \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx + \int_1^e x dx = \left( \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^e =$   
 $= \frac{1}{2} (\ln^2 e + e^2 - \ln^2 1 - 1) = \frac{1}{2} (1 + e^2 - 0 - 1) = \frac{e^2}{2}$

c)  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left( \frac{\ln x}{x} + x - x \right) dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_{e^n}^{e^{n+1}} =$   
 $= \frac{1}{2} (\ln^2 e^{n+1} - \ln^2 e^n) = \frac{1}{2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{2n+1}{2}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$I_n = \frac{2n+1}{2}$ ;  $I_{n+1} = \frac{2n+3}{2}$ ;  $I_{n+1} - I_n = \frac{2n+3-2n-1}{2} = 1$  const

$I_1 = \frac{3}{2}$ ;  $(I_n)$  - progresie aritmetică  $\left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{3}{2} \\ r = 1 \end{array} \right\}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2 \ln x$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
  - 5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
  - 5p c) Să se arate că  $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int f_1(x) dx$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$ .
  - 5p c) Să se determine  $m \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$ .

① a)  $f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{x}$ ;  $x \in (0, +\infty)$

b)  $f''(x) = (1 - \frac{2}{x})' = \frac{2}{x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbb{R}$ .

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} = 0 \Rightarrow x=2$ ;  $f(2) = 2 - 2 \ln 2 = \ln e^2 - \ln 2^2 = \ln \frac{e^2}{4}$

$x$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow \ln \frac{e^2}{4}$	$\nearrow$

$f(x) \geq f(2) = \ln \frac{e^2}{4}; \forall x \in (0, +\infty)$

② a)  $\int f_1(x) dx = \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

b)  $\int_0^1 e^x f_0(x) dx = \int_0^1 e^x (x+1) dx = e^x(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x(x+1-1) \Big|_0^1 = x e^x \Big|_0^1 = e$

$f(x) = x+1; f'(x) = 1$   
 $g'(x) = e^x; g(x) = e^x$

c)  $\int_0^1 f_m(x) dx = \int_0^1 [m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1] dx = \left[ \frac{m^2 x^3}{3} + \frac{(m^2 - m + 1)x^2}{2} + x \right] \Big|_0^1 = \frac{m^2}{3} + \frac{m^2 - m + 1}{2} + 1 = \frac{5m^2 - 3m + 9}{6}$

$\frac{5m^2 - 3m + 9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow 5m^2 - 3m + 9 = 9$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$m(5m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \text{ nu convine, } m \in \mathbb{R}^* \\ m_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$

$m = \frac{3}{5}$  soluție

SUBIECTUL III (30p)

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 1$ , pentru orice  $x > -1$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră  $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$ .

- 5p a) Să se verifice că  $I_0 = 1$ .
- 5p b) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p c) Folosind, eventual, faptul că  $1 \leq \ln x \leq 2$  oricare ar fi  $x \in [e, e^2]$ , să se demonstreze că  $1 \leq \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \leq 2^n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0 \Rightarrow y=0$  asimptotă orizontală spre  $-\infty$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0; f(0) = 1.$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

min

$f(x) \geq 1, \forall x > -1.$

② a)  $I_0 = \int_e^{e^2} \frac{\ln^0 x}{x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

b)  $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x (\ln x)' dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2} (\ln^2 e^2 - \ln^2 e) = \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) = \frac{3}{2}$

c)  $1 \leq \ln x \leq 2, \forall x \in [e, e^2] \Rightarrow 1 \leq \ln^u x \leq 2^u, \forall x \in [e, e^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\ln^u x}{x} \leq \frac{2^u}{x}; \forall x \in [e, e^2] \Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{\ln^u x}{x} dx \leq$

$\leq \int_e^{e^2} \frac{2^u}{x} dx \Rightarrow \ln x \Big|_e^{e^2} \leq \frac{\ln^{u+1} x}{u+1} \Big|_e^{e^2} \leq 2^u \ln x \Big|_e^{e^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{2^{u+1}-1}{u+1} \leq 2^u; \forall x \in [e, e^2]$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(e)$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  a graficului funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $x^e \leq e^x$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcția  $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^4 f^2(x) dx$ .
- 5p b) Să se verifice că  $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{5}f(x)} dx = 0$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$ , oricare ar fi  $m \in [0, 2]$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}; x \in (0, +\infty)$

$f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = \frac{1 - 1}{e^2} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$   
asimptotă orizontală spre  $+\infty$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e; f(e) = \frac{1}{e}$

$x$	0	$e$
$f'(x)$		+ 0 -
$f(x)$		$\nearrow \frac{1}{e} \searrow$ max

$f(x) \leq f(e), \forall x \in (0, +\infty)$   
 $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e}; \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow e \ln x \leq x \ln e \Rightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Rightarrow$

② a)  $\int_0^4 (16-x^2) dx = \left(16x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^4 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

b)  $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-\sqrt{16-x^2})' dx = -\sqrt{16-x^2} \Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = -\sqrt{11} + \sqrt{11} = 0$

c)  $m_g \leq m_a; 0 \leq \sqrt{(4-x)(4+x)} \leq \frac{4-x+4+x}{2} = m$   
 $0 \leq \int_0^m \sqrt{(4-x)(4+x)} dx \leq \int_0^m 4 dx \Rightarrow 0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 4m \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 4 \cdot 2 = 8; \forall m \in [0, 2]$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = e^{-x} - 1$  și  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

5p a) Să determine  $f_1(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  a graficului funcției  $f_0$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$ .

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x e^{-x} f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f_1(x) = f'_0(x) = (e^{-x} - 1)' = -e^{-x}; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 1) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ asimptotă orizontală către } +\infty$$

$$\text{c) } f_2(x) = f'_1(x) = (-e^{-x})' = e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} + x - 1)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{e^x \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\text{b) } g(x) = x e^{-x}; e^x \sqrt{x^2 + 1} = x \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Aria}(\Gamma_g) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$e(x) = x^2 + 1 = t \quad F(t) = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C =$$

$$e'(x) dx = 2x dx = dt \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} t \sqrt{t} + C$$

$$\text{Aria}(\Gamma_g) = \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\text{c) } \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot e^x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int (x^2 + 1) e^x dx = (x^2 + 1) e^x \Big|_{-1}^1 - \int 2x e^x dx =$$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$f(x) = x^2 + 1; f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^x; g(x) = e^x$$

$$= (x^2 + 1) e^x - (2x e^x - 2e^x) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= e^x (x^2 + 1 - 2x + 2) \Big|_{-1}^1 = e^x (x^2 - 2x + 3) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= e(1 - 2 + 3) - e^{-1}(1 + 2 + 3) = 2e - 6e^{-1} = 2e - \frac{6}{e}$$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

- 5p a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 0$ .
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right)$ .
- 5p c) Să se arate că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(0; +\infty)$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Se consideră  $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

① a)  $f$  continuă în  $x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{aligned} l_s(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0 \\ l_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + a) = a \\ f(0) &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 0$$

b)  $f'(x) = e^x$ ;  $x < 0$ ;  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ;  $x_0 = -1$ .

$y_0 = f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$ ;  $f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y - \frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e}(x + 1)$ ;  $x - y e + 2 - e = 0$  - ec. tg.

c)  $f''(x) = (2x + 1)' = 2 > 0$ ;  $\forall x \geq 0 \Rightarrow f'$  crescătoare pe  $(0, +\infty)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$

② a)  $I_0 = \int_2^3 \frac{x^0}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_2^3 = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} \right) =$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

b)  $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$

$\varphi(x) = x^2 - 1 = t$   $F(t) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C$

$\varphi'(x) dx = 2x dx = dt$

$I_1 = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2} - x^n}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \frac{x^n (x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_2^3 =$

$$= \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .
  - 5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(0, 2]$ .
  - 5p c) Să se arate că  $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x - x$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$ .
  - 5p b) Să se demonstreze că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă pe intervalul  $(1, +\infty)$ .
  - 5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) + x$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x=1$  și  $x=e$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(e^x)'x^2 - e^x(x^2)'}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$ ;  $x \in \mathbb{R}^+$   
 b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-2)}{x^3} = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \notin \mathbb{R}^+ \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\frac{e^2}{4}$   
min

$f$  este descrescătoare pe  $(0, 2]$

c)  $f$  - descrescătoare pe  $(0, 2]$ ;  $f(\sqrt{2}) \geq f(\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \geq \frac{e^{\sqrt{3}}}{3} \Rightarrow 3e^{\sqrt{2}} \geq 2e^{\sqrt{3}} \Rightarrow 2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$

② a)  $\int_1^2 (x - \ln x + x + \ln x)^2 dx = \int_1^2 (2x)^2 dx = 4 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = 4 \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{28}{3}$

b)  $F$  primitivă pt  $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \ln x - x$   
 $F''(x) = (\ln x - x)' = \frac{1}{x} - 1 \leq 0, \forall x > 1 \Rightarrow F$  concavă pe  $(1, +\infty)$

c)  $h(x) = f(x) + x = \ln x - x + x = \ln x$   
 aria  $(T_n) = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = e(1-1) - (0-1) = 1$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = 4x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ .
  - 5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + \ln x$ .
- 5p a) Știind că  $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - \ln x$ , să se verifice că  $\int g(x) dx = g(x) + C$ ,  $x > 0$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
  - 5p c) Să se demonstreze că  $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$ .

① a)  $f'(x) = 2(x+1) + 2(x-1) = 2x+2+2x-2 = 4x, \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2+\frac{2}{x^2})}{x^2} = 2$

c)  $g(x) = \frac{4x}{2(x^2+1)} = \frac{2x}{x^2+1}; x \in \mathbb{R}; g'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$   
 $g'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$   
 $g(-1) = -\frac{2}{2} = -1; g(1) = 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		min	max	

② a)  $g(x) = e^x + \ln x - \ln x = e^x, x \in (0, +\infty) \int g(x) dx = \int e^x dx = e^x + C = g(x) + C, x > 0$

b)  $\int_1^e (e^x + \ln x) dx = \int_1^e e^x dx + \int_1^e \ln x dx = e^x \Big|_1^e + \int_1^e \ln x dx$   
 $I_1 = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e$   
 $f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}$   
 $g'(x) = 1; g(x) = x$   
 $I = (e^x + x \ln x - x) \Big|_1^e = e^e + e - e - e + 1 = e^e - e + 1$

c)  $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int (x^2)' f(x^2) dx = \frac{1}{2} F(x^2) \Big|_1^e = \frac{1}{2} (e^{x^2} + x^2 \ln x^2 - x^2) \Big|_1^e = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$   
 $F(x) = \int f(x) dx = e^x + x \ln x - x, x > 0$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5p c) Să se demonstreze că  $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ , pentru orice  $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_1^e \left( f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$ .

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .

5p c) Să se verifice că  $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\text{c) } f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{2e}$ max	0

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}, \quad \forall x \in [\sqrt{e}, +\infty)$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int_1^e \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{b) } F \text{ - o primitivă a funcției } f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F \text{ este crescătoare pe } (0, +\infty)$$

$$\text{c) } \int_1^2 f'(x)f(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)^2}{2} =$$

$$\frac{\left(\frac{5}{36}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{2} = -\frac{22}{81}$$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in [0,1]$ .  
 5p b) Să se arate că  $f$  este funcție crescătoare pe  $[0,1]$ .  
 5p c) Să se demonstreze că  $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$ , pentru orice  $x \in [0,1]$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x}$  și  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- 5p a) Să se arate că  $F(x) = -f(x) + 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .  
 5p b) Să se demonstreze că funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = F(x) - f(x)$  este concavă pe  $\mathbb{R}$ .  
 5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$ .

① a)  $f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ ;  $x \in [0,1]$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \notin [0,1]$   
 $f'(x) > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$  este crescătoare pe  $[0,1]$   
 $f(0) = \frac{1}{2}; f(1) = \frac{e}{3}$

$x$	0	1
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{e}{3}$

c)  $f$  crescătoare pe  $[0,1] \Rightarrow f(0) \leq f(1), \forall x \in [0,1] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{e}{3}; \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2; \forall x \in [0,1]$

② a)  $F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = -e^{-x} + 1 = -f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $h(x) = -f(x) + 1 - f(x) = -2f(x) + 1, x \in \mathbb{R}$   
 $h'(x) = -2f'(x) = 2e^{-x}; h''(x) = (2e^{-x})' = -2e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow h$  concavă pe  $\mathbb{R}$

c)  $\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (e^{-x^2})' dx =$

$e^{-x^2} = t$   
 $e^{-x^2} dx = -2x e^{-x^2} dx = dt$   
 $= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{e-1}{2e}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că  $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8$ , oricare ar fi  $x > 1$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3^{-x}$ .
- 5p c) Să se arate că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$  și convexă pe  $[0, +\infty)$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - x^2 - x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = 1 = m$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = 2 = n$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0; \Delta = 16; x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 & f(-1) = -1 \\ x_2 = 3 & f(3) = 7 \end{cases}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-1$	$\searrow$	$7$	$\nearrow$
		max		min	

$f(x) \leq -1, \forall x < -1$   
 $f(x) \geq 7, \forall x > 3$   
 $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \leq -1, \forall x > 1 \Rightarrow$

$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 7 + 1 = 8, \forall x > 1$        $= -f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1, \forall x > 1$

② a)  $\int_{-1}^1 (3^x + 3^{-x}) dx = \left( \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left( \frac{3}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} \right) - \left( \frac{3^{-1}}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 3} \right) = \frac{\frac{3}{6} - \frac{2}{3}}{\ln 3} = \frac{16}{3 \ln 3}$

b)  $\text{vol}(C_g) = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 3^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} \frac{3^{-2x}}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{16}{3 \ln 3}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2  
 $= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3^{-2}}{\ln 3} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{\pi}{2 \ln 3} \left( 1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{8\pi}{18 \ln 3} = \frac{4\pi}{9 \ln 3}$

c)  $F$  - primitivă  $\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}; F''(x) = f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3 = (3^x - 3^{-x}) \ln 3 = \frac{(3^{2x} - 1) \ln 3}{3^x}; F''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$F''(x)$	$-$	$0$	$+$
$F(x)$	$\cap$	$F(0)$	$\cup$

$F$  - concavă pe  $(-\infty, 0]$   
 $F$  - convexă pe  $[0, +\infty)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - e \ln x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_2^e \left( f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$ .

5p b) Să se arate că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă pe  $[2, +\infty)$ .

5p c) Să se determine  $a$  real,  $a > 2$  astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 2$  și  $x = a$ , să fie egală cu  $\ln 3$ .

① a)  $f'(x) = (x - e \ln x)' = 1 - e \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$

b)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e \ln x}{\frac{x - e}{x}} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x(x - e \ln x)}{x - e} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{2x - e \ln x - e}{1} = \frac{2e - e \ln e - e}{1} = \frac{2e - e - e}{1} = 0$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x - e = 0 \Rightarrow x = e$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		- - 0 + +	
$f(x)$		$\searrow$ 0 $\nearrow$	

$f(e) = e - e \ln e = 0$

② a)  $\int_2^e \left( f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_2^e \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_2^e = \ln e - \ln 2 = \ln \frac{e}{2} = 1 - \ln 2$

b)  $F$  - primitivă a lui  $f$ ;  $F'(x) = f(x)$ ;  $F''(x) = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] < 0, \forall x \in [2, +\infty)$   
 $F''(x) < 0, \forall x \in [2, +\infty) \Rightarrow F$  concavă pe  $[2, +\infty)$

c)  $\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_2^a \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \left[ \ln x + \ln(x-1) \right] \Big|_2^a = \ln a + \ln(a-1) - \ln 2 - \ln 1 = \ln a + \ln(a-1) - \ln 2 = \ln \frac{a(a-1)}{2}$   
 $\ln \frac{a(a-1)}{2} = \ln 3$ ;  $\frac{a(a-1)}{2} = 3$ ;  $a^2 - a - 6 = 0$   
 $\Delta = 1 + 24 = 25$

$a_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -2 < 2, \text{ nu convine} \end{cases}$   
 $a = 3$  soluție

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  și  $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ .

5p a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^2 f(e^x) dx$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_1^2 f(x)F(x) dx = \frac{(3 \ln 2 - 1)^2}{2}$ .

① a)  $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+1)e^x = (x^2-1)e^x, x \in \mathbb{R}$   
 b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ ;  $f(1) = 0$   
 $f(-1) = \frac{4}{e}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow \frac{4}{e}$	$\searrow 0$	$\nearrow$	
			min		

$A(-1; \frac{4}{e})$   
 $B(1; 0)$  } puncte de extrem

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{(x^2-1)e^x}{(x^2-2x+1)e^x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} - 1 \right] =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{x+1}{x-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1-x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$

② a)  $F'(x) = (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)' - 1 = \ln x + \frac{x+1}{x} - 1 = \ln x + \frac{x+1-x}{x} =$   
 $= \ln x + \frac{1}{x}, x \in [1, +\infty) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow F$  - primitivă a lui  $f$

b)  $\int_1^2 f(e^x) dx = F(e^x) \Big|_1^2 = \left[ (e^x+1) \ln e^x - e^x + 1 \right] \Big|_1^2 = \left[ x(e^x+1) - e^x + 1 \right] \Big|_1^2 =$   
 $= [2(e^2+1) - e^2 + 1] - [1(e+1) - e + 1] = 2e^2 + 2 - e^2 + 1 - e - 1 + e - 1 =$   
 $= e^2 + 1$

c)  $\int_1^2 f(x)F(x) dx = \int_1^2 F'(x)F(x) dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{F^2(2) - F^2(1)}{2} =$   
 $= \frac{(3 \ln 2 - 1)^2}{2}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2-1}{4}$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .

2. Fie  $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$ , pentru  $n \in \mathbb{N}$ .

5p a) Să se calculeze  $I_0$ .

5p b) Să se arate că  $I_1 = e^2$ .

5p c) Să se demonstreze că  $(n+1)I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1}e - 1)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{1}{x} = x^3 - \frac{1}{x} = \frac{x^4-1}{x}; x \in (0, +\infty)$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) = 0; x^2-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow \frac{1}{4}$	$\nearrow$

$f(1) = \frac{1}{4}$

$x=1$  punct de minim

c)  $x=1$  punct de minim  $\Rightarrow f(y) \geq f(1), \forall y > 0$

luăm  $y = \sqrt{x}; f(\sqrt{x}) \geq f(1) \Rightarrow \frac{(\sqrt{x})^4}{4} - \ln \sqrt{x} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\ln \sqrt{x} \geq -\frac{x^2+1}{4} \cdot (-1); \ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2-1}{4}; \forall x \in (0, +\infty)$

② a)  $I_0 = \int_1^2 x^0 e^x dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e$

b)  $I_1 = \int_1^2 x e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = e^x(x-1) \Big|_1^2 =$   
 $= e^2(2-1) - e^1(1-1) = e^2$

$f(x) = x \quad f'(x) = 1$   
 $g(x) = e^x \quad g'(x) = e^x$

c)  $I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1} e^x dx = \int_1^2 x^{n+1} (e^x)' dx = x^{n+1} e^x \Big|_1^2 - (n+1) \int_1^2 x^n e^x dx =$   
 $= 2^{n+1} e^2 - e - (n+1) I_n \Rightarrow (n+1) I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1} - 1),$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării  
Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

- 1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x), x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p c) Să se scrie ecuația asimptotei oblice către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ , unde  $m, n, p \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Pentru  $m=0, n=-3, p=2$ , să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p b) Să se determine  $m, n, p \in \mathbb{R}$ , știind că  $f'(-1) = f'(1) = 0$  și  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t) dt$ .

① a)  $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$   
 b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0; f(0) = 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\searrow 1$	$\nearrow$

$f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

c)  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x - x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{1} = e^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$   
 $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$

$y = mx + n; y = -x$  asimptotă oblică spre  $-\infty$

② a)  $\int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{1 - 6 + 8}{4} = \frac{3}{4}$

b)  $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n; \int_{-1}^1 f(x) dx = (\frac{x^4}{4} + \frac{mx^3}{3} + \frac{nx^2}{2} + px) \Big|_{-1}^1 = (\frac{1}{4} + \frac{m}{3} + \frac{n}{2} + p) - (-\frac{1}{4} - \frac{m}{3} + \frac{n}{2} - p) = \frac{2m}{3} + 2p$

$f'(-1) = f'(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2m + n = 0 \\ 3 + 2m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = -3 \\ 2m + n = -3 \end{cases} \Rightarrow 2m = -6$

$\int_{-1}^1 f(x) dx = 4; 2p = 4 \Rightarrow p = 2$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} (\frac{t^4}{4} + m \frac{t^3}{3} + n \frac{t^2}{2} + pt) \Big|_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 (\frac{1}{4} + \frac{m}{3x} + \frac{n}{2x^2} + \frac{p}{x^3})}{x^4} = \frac{1}{4}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 1$ .
- 5p a) Să se calculeze derivata funcției  $f$ .
  - 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
  - 5p c) Să se arate că  $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + \ln x$  și  $g(x) = x \ln x$ .
- 5p a) Să se arate că  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$ .
  - 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$ .

① a)  $f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0; f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$

$\searrow 0 \nearrow$   
min

$f$  strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$   
 $f$  strict crescătoare pe  $[0, +\infty)$

c)  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Rightarrow e^{x^2} + e^x \geq x^2 + 1 + e^x \geq x^2 + 1 + x + 1 = x^2 + x + 2$   
 $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

② a)  $g'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = f(x), \forall x \in (0, +\infty)$

$g'(x) = f(x), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow g$  - primitivă pt  $f$

b)  $\int_1^e f(x) g(x) dx = \int_1^e g'(x) g(x) dx = \frac{g^2(x)}{2} \Big|_1^e = \frac{g^2(e) - g^2(1)}{2} =$   
 $= \frac{(e \ln e)^2 - (1 \ln 1)^2}{2} = \frac{e^2}{2}$

c)  $Aria(\Gamma_g) = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e x \ln x dx$

$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x \ln x$	$g'(x) = \ln x + 1$
$g'(x) = x$	$g(x) = \frac{x^2}{2}$		

$Aria(\Gamma_g) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$   
 $= \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^e =$   
 $= \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) \Big|_1^e =$   
 $= \frac{e^2}{2} \left( \ln e - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \ln 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} \left( \frac{2}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} =$   
 $= \frac{e^2 + 1}{4}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{1004} + 2009^x$ .

5p a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este funcție crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ ,  $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$   
 $f$  strict crescătoare pe  $(0, e]$   
 $f$  strict descrescătoare pe  $[e, +\infty)$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală către  $+\infty$  la  $\mathbb{R}$

② a)  $\int f(x) dx = \int (x^{1004} + 2009^x) dx =$

$= \frac{x^{1005}}{1005} + \frac{2009^x}{\ln 2009} + C$

b)  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  primitivă pt  $f \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow F$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$

c)  $\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 x \left[ (x^2)^{1004} + (2009^{x^2}) \right] dx = \int_0^1 x^{2009} dx +$   
 $+ \int_0^1 x \cdot 2009^{x^2} dx = \frac{x^{2010}}{2010} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' \cdot 2009^{x^2} dx =$

$= \left( \frac{x^{2010}}{2010} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2009^{x^2}}{\ln 2009} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2009^1 - 2009^0}{\ln 2009} =$   
 $= \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2008}{\ln 2009} =$

$= \frac{1}{2010} + \frac{1004}{\ln 2009}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ .

- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe  $(1, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ .

- 5p a) Să se determine  $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$ .
- 5p b) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$ .
- 5p c) Să se arate că  $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e-1)$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{e} e^x - 1 \right) = \frac{1}{e} \cdot e - 1 = 1 - 1 = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$   
 $f(1) = \frac{1}{e} \cdot e - 1 = 0$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow f$  continuă în  $x_0 = 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e} e^x - 1 \right) = \frac{1}{e} \cdot e^{-\infty} - 1 = -1 \Rightarrow y = -1$   
 asimptotă orizontală spre  $-\infty$

c)  $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;  $x \in (1, +\infty)$   
 $f''(x) = \left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$  concavă pe  $(1, +\infty)$

② a)  $\int (x^2 + 1) f(x) dx = \int (x^2 + 1) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx =$   
 $= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx =$   
 $= (x + \ln(x^2 + 1)) \Big|_0^1 = 1 + \ln 2 = \ln e + \ln 2 = \ln(2e)$

c)  $\int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} \Big|_0^1 = e^{f(1)} - e^{f(0)} = e^{\frac{1}{2}} - e = e^{\frac{1}{2}} - e = e^{\frac{1}{2}} - e = e(e-1)$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln x$ .

5p a) Să se arate că  $f(1) - f'(1) = 1$ .

5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$ .

2. Se consideră integralele  $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$  și  $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{x+1} dx$ .

5p a) Să se verifice că  $I + J = e - 1$ .

5p b) Utilizând, eventual, inegalitatea  $e^x \geq x + 1$ , adevărată pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , să se arate că  $J \geq \frac{1}{2}$ .

5p c) Să se demonstreze că  $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$ .

① a)  $f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$   
 $f(1) - f'(1) = 1 - \ln 1 - \frac{1-1}{1} = 1 - 0 - 0 = 1$ .

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ,  $f(1) = 1$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		min	

$x = 1$  punct de minim  
al funcției

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = 0$

② a)  $I + J = \int_0^1 \frac{e^x + x e^x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{x+1} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$

b)  $e^x \geq x + 1, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \frac{x e^x}{x+1} \geq x, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x e^x}{x+1} dx \geq \int_0^1 x dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x e^x}{x+1} dx \geq \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \Rightarrow J \geq \frac{1}{2}$

c)  $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$

$f(x) = \frac{1}{x+1}; f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$g(x) = e^x; g'(x) = e^x$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$I = \frac{1}{x+1} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{(x+1)^2} e^x dx = \frac{e}{2} - \frac{e^0}{1} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx =$   
 $= \frac{e}{2} - 1 + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + e^x$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- 5p b) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$ .

2. Pentru orice număr natural  $n$  se consideră  $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$ .

- 5p a) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p b) Utilizând faptul că  $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $x \in [0, 1]$ , să se arate că  $I_{2009} \geq I_{2008}$ .
- 5p c) Folosind, eventual, identitatea  $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$ , adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $x \in \mathbb{R}$ , să se arate că  $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$ .

① a)  $f'(x) = 2x + e^x$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2 \cdot 0 + e^0 = 1$ .

b)  $f''(x) = 2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbb{R}$

c)  $(2x + e^x) - (2 + e^x) + x^2 + e^x = e^x - 3$ ;  $2x + e^x - 2 - e^x + x^2 + e^x = e^x - 3$   
 $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ .

② a)  $I_1 = \int_0^1 x(1+x) dx = \int_0^1 (x + x^2) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

b)  $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$   
 $x(1+x)^n \leq x(1+x)^{n+1} \Rightarrow \int_0^1 x(1+x)^n dx \leq \int_0^1 x(1+x)^{n+1} dx \Rightarrow$   
 $\Rightarrow I_n \leq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow I_{2009} \geq I_{2008}$

c)  $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\int_0^1 x(1+x)^n dx = \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx - \int_0^1 (1+x)^n dx$   
 $I_n = \left[ \frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right] \Big|_0^1 = \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} =$   
 $= \frac{2^{n+2} - 1}{n+2} - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{(n+1)(2^{n+2} - 1) - (n+2)(2^{n+1} - 1)}{(n+1)(n+2)} =$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$= \frac{n \cdot 2^{n+2} + 2^{n+2} - n - 1 - n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} + n + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \ln x$ .

5p a) Să se arate că  $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$ .

5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ .

5p a) Să se determine  $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx$ .

5p b) Să se arate că  $\int_0^1 f'(x) dx = 2e - 1$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1), \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 \ln x + 1)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x + 1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2$$

$$\text{c) } f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2e}$$

$x$	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$-\frac{1}{2e}$	

$$f(x) \geq -\frac{1}{2e}, \forall x > 0$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int_0^1 f(x)e^{-x} dx = \int_0^1 x e^x \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } f'(x) = x' e^x + x (e^x)' = e^x + x e^x = (x+1)e^x$$

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = (x+1)e^x \Big|_0^1 = 2e - e^0 = 2e - 1$$

$$\text{c) } \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2 e^{x^2}}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2)' e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^1) = \frac{e^4 - e}{2} = \frac{e(e^3 - 1)}{2}$$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$ .

5p a) Să se calculeze  $f(0) + f'(0)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x}$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe  $\mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - x$ ,  $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2008} - x^{2009}$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f$ .

5p b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că  $\int_0^1 (x+1)g(x) dx < 1$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = \left(x - \frac{1}{e^x}\right)' = 1 + \frac{e^x}{e^{2x}} = 1 + \frac{1}{e^x} = 1 + e^{-x}$$

$$f(0) + f'(0) = 0 - \frac{1}{e^0} + 1 + \frac{1}{e^0} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{e^x} + 1 + \frac{1}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

$$\text{c) } f''(x) = (1 + e^{-x})' = -e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ concavă pe } \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int f(x) dx = \int (1-x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{b) } \text{Vol}(C_f) = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (1-x)^2 dx = \pi \int_0^1 (1-2x+x^2) dx =$$

$$= \pi \left(x - \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \pi \left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{c) } (x+1)g(x) = (x+1)(1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2008}-x^{2009}) =$$

$$= 1 - x^{2010}, \forall x \in [0, 1]$$

$$\int_0^1 (x+1)g(x) dx = \int_0^1 (1 - x^{2010}) dx = \left(x - \frac{x^{2011}}{2011}\right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2011} < 1.$$

lipseste  
pagina

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

5p c) Să se demonstreze că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x \ln x$  și  $g(x) = 2x + \ln x + 1$ .

5p a) Să se arate că  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x)g(x) dx$ .

5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+3)e^x = (x^2+4x+5)e^x, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 5$$

$$\text{c) } f''(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+5)e^x = (x^2+6x+9)e^x = (x+3)^2 e^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f' \text{ crescătoare pe } \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } f'(x) = 2x + 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 2x + \ln x + 1 = g(x), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ - primitivă a funcției } g$$

$$\text{b) } \int_1^e f(x)g(x) dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^e = \frac{f^2(e) - f^2(1)}{2} = \frac{(e^2 + e \ln e)^2 + (1 + \ln 1)^2}{2} = \frac{(e^2 + e)^2 + 1}{2}$$

$$\text{c) } \text{aria}(\Gamma_f) = \int_1^e (x^2 + x \ln x) dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e$$

$$f(x) = \ln x; \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x; \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$\text{Aria}(\Gamma_f) = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2 \ln e}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4e^3 + 3e^2 - 1}{12}$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$ .

- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{2}$ , pentru orice  $x \in (0; +\infty)$ .
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0$ , pentru orice  $x \in (0; 1]$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$  și  $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$ .

- 5p a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 (xf(x) + F(x)) dx = F(1)$ .

① a)  $f'(x) = 1\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - 3 = \frac{2\sqrt{x} + x - 6}{2} = \frac{3\sqrt{x} - 6}{2}, x \in (0, +\infty)$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ ;  $f(4) = 4 \cdot 2 - 12 = -4$

$x$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow -4 \nearrow$ min	

$f$  descrescătoare pe  $(0, 4]$   
 $f$  crescătoare pe  $[4, +\infty)$

c)  $f(1) = -2$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ ,  $f$  descrescătoare pe  $(0, 1]$

$f(1) \leq f(x) \leq 0, \forall x \in (0, 1] \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq f(x) \leq 0, \forall x \in (0, 1] \\ -2 \leq f(x^2) \leq 0, \forall x \in (0, 1] \end{cases}$

$-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0, \forall x \in (0, 1]$

② a)  $F'(x) = e^x + 3x^2 + 2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$  - o primitivă a lui  $f$

b)  $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx = \int_0^1 F'(x) \cdot F(x) dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{F^2(1) - F^2(0)}{2}$

$= \frac{(e+2-1)^2 - (1-1)^2}{2} = \frac{(e+2)^2 - 0}{2} = \frac{(e+2)^2}{2}$

c)  $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ;  $x f(x) + F(x) = x F'(x) + 1 \cdot F(x) = [x F(x)]'$

$\int_0^1 [x f(x) + F(x)] dx = \int_0^1 [x F(x)]' dx = x F(x) \Big|_0^1 = F(1)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că tangenta la graficul funcției  $f$ , dusă în punctul de coordonate  $(-2, f(-2))$ , este paralelă cu axa  $Ox$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ .

- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 x f(x^2) dx = \frac{e}{2}$ .

① a)  $f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2-3x-3)e^x = (x^2-x-6)e^x, x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-3x-3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x-3}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)e^x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y=0$  asimptotă orizontală spre  $-\infty$

c)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$   
 $m = f'(-2) = (4+2-6)e^{-2} = 0 \Rightarrow$  tg la  $G_f$  în  $x_0 = -2$  este  $\parallel Ox$

② a)  $f$  continuă pe  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  - funcții elementare

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x+1) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = 0 \text{ deci } f \text{ continuă pe } \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f \text{ admite primitive pe } \mathbb{R}$

b)  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+2) dx + \int_0^1 (e^x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-1}^0 + (e^x+x) \Big|_0^1 =$   
 $= -\frac{1}{2} + 2 + e + 1 - 1 = -\frac{1}{2} + 2 + e = \frac{2e+3}{2}$

c)  $\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 x(e^{x^2}+1) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 x dx =$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e}{2}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

5p b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$ , oricare ar fi  $x \in [1, +\infty)$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  și  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$ .

5p b) Să se demonstreze că  $\int g(x) dx = f(x) + C$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x}{x + \ln x} = \frac{1 - \ln 1}{1 + \ln 1} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ .

b)  $f'(x) = \frac{(1 - \frac{1}{x})(x + \ln x) - (x - \ln x)(1 + \frac{1}{x})}{(x + \ln x)^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}; \forall x \in [1, +\infty)$

c)  $g(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2} \cdot \frac{(x + \ln x)^2}{(x - \ln x + x + \ln x)^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{4x^2} = \frac{\ln x - 1}{2x^2}; \forall x \in [1, +\infty); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

② a)  $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

b)  $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\int g(x) dx = \int f'(x) dx = f(x) + C$

c)  $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 f'(x) \cdot f^{-2}(x) dx = \frac{f^{-1}(x)}{-2+1} \Big|_1^2 = \frac{f^{-1}(x)}{-1} \Big|_1^2 =$

$= -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = -\frac{1}{\ln(x^2 + 1)} \Big|_1^2 = -\frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

- 5p a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p c) Știind că  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ , să se determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}$$

2. Se consideră  $I_n = \int_x^e x \ln^n x dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $I_0$ .
- 5p b) Să se arate că  $I_n \leq I_{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p c) Să se demonstreze că are loc relația  $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}; \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0; f(0) = -1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\rightarrow -1$	$\nearrow$

min

c)  $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1} =$

$= \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{x^2-1+1-x^2}{x^2+1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 \cdot 2009 + x^{2010}}{x^{2009}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

② a)  $I_0 = \int_x^e x \ln^0 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_x^e = \frac{e^2 - e^2}{2}$

b)  $x \in [e, e^2] \Rightarrow 1 \leq \ln x \leq 2 \mid \cdot x \ln^n x \Rightarrow x \ln^n x \leq x \ln^{n+1} x,$

$\forall x \in [e, e^2]$  deci  $\int_x^e x \ln^n x dx \leq \int_x^e x \ln^{n+1} x dx \Rightarrow I_n \leq I_{n+1}$

c)  $I_n = \int_x^e x \ln^n x dx = \int_x^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^n x dx = \frac{x^2}{2} \ln^n x \Big|_x^e - \int_x^e \frac{x^2}{2} \ln^{n-1} x \cdot x dx$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \ln^n x; & f'(x) &= \frac{n}{x} \ln^{n-1} x \\ g'(x) &= x & g(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= \frac{x^2}{2} \ln^n x \Big|_x^e - \frac{n}{2} I_{n-1} \\ &= \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$



SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1; 0)$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$  și  $F(x) = x - \ln x$ .

- 5p a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) \cdot f(x) dx$ .
- 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $F$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$ .

① a)  $f'(x) = 2x - \frac{1 \cdot x^2 - 1(x^2)'}{x^4} = 2x + \frac{2x}{x^4} = 2x + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 + 2}{x^3}; x \in (0, +\infty)$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = 1; y_0 = 0; f'(1) = 4$   
 $y - 0 = 4(x - 1); 4x - y - 4 = 0$  - ec. tg

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 2}{x \cdot x^3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4(2 + \frac{2}{x^4})}{x^4} = 2$

② a)  $F'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = f(x), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$  este o primitivă a lui  $f$

b)  $\int_1^2 f(x) \cdot f(x) dx = \int_1^2 F'(x) F'(x) dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{F^2(2) - F^2(1)}{2} =$   
 $= \frac{(2 - \ln 2)^2 - (1 - \ln 1)^2}{2} = \frac{(2 - \ln 2)^2 - 1}{2}$

c)  $\text{aria}(\Gamma_F) = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e (x - \ln x) dx = \int_1^e x dx - \int_1^e \ln x dx =$

$= \frac{x^2}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \ln x dx$

$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e$

$f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = 1; g'(x) = x$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\text{Aria}(\Gamma_F) = \left( \frac{x^2}{2} - x \ln x + x \right) \Big|_1^e = \left( \frac{e^2}{2} - e \ln e + e \right) -$   
 $- \left( \frac{1}{2} - \frac{\ln 1}{0} + 1 \right) = \frac{e^2}{2} - e + e - \frac{3}{2} = \frac{e^2 - 3}{2}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (1; +\infty)$

5p b) Să se verifice că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(1, +\infty)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$  și  $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$ .

5p a) Să se arate că  $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$ .

5p b) Să se verifice că  $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(2x-1)'(x-1) - (2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}; x \in (1, +\infty)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1$ .

c)  $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$  descrescătoare pe  $(1, +\infty)$

② a)  $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx = \int_1^4 \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int_1^4 \frac{1}{x} dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \ln x \Big|_1^4 + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_1^4 = \ln x \Big|_1^4 + 2 \cdot \sqrt{x} \Big|_1^4 = \ln 4 - \ln 1 + 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = \ln 4 + 2$

b)  $\int_1^4 g(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{4} \ln x dx = \frac{1}{4} \left( x \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x} \cdot x dx \right) = \frac{1}{4} \left( x \ln x \Big|_1^4 - x \Big|_1^4 \right) = \frac{1}{4} \left( 4 \ln 4 - 1 \ln 1 - 4 + 1 \right) = \frac{1}{4} \left( 4 \ln 4 - 3 \right) = \ln 4 - \frac{3}{4}$

$f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}$   
 $g'(x) = 1; g(x) = x$

c)  $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} \cdot \frac{1}{4} \ln x^2 dx = \frac{1}{4} \int_1^e \frac{\ln x^2}{x^2} dx + \frac{1}{4} \int_1^e \frac{\ln x^2}{x} dx$

$f(x) = \ln x^2; f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$   
 $g'(x) = \frac{1}{x^2}; g(x) = -\frac{1}{x}$   
 $J_1 = -\frac{1}{x} \ln x^2 \Big|_1^e - 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left( -\frac{1}{x} \ln x^2 + \frac{2}{x} \right) \Big|_1^e$

$f(x) = \ln x^2; f'(x) = \frac{2}{x}$   
 $g'(x) = \frac{1}{x}; g(x) = \ln x$   
 $J_2 = \ln x \ln x^2 \Big|_1^e - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$   
 $f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}; g'(x) = \frac{1}{x}; g(x) = \ln x$   
 $J_3 = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e; J_4 = \ln x \ln x^2 \Big|_1^e - \ln x^2 \Big|_1^e$

continuare c)  $J = \frac{1}{4} J_1 + \frac{1}{4} J_2 = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{x} \ln x^2 + \frac{2}{x} \right) \Big|_1^e + \frac{1}{4} \left( \ln x \ln x^2 - \ln x^2 \right) \Big|_1^e - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{4} \left( -\frac{2}{e} + \frac{2}{1} \right) + \frac{1}{4} \left( \ln e \ln e^2 - \ln e^2 \right) - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{4} \left( -\frac{2}{e} + 2 \right) + \frac{1}{4} \left( 2 - 2 \right) - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2010} + 2010^x$ .

5p a) Să se determine  $f'(x), x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_1^e g(x) dx = 1$ .

5p b) Folosind identitatea  $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2+1}$ , adevărată pentru orice  $x > 0$ , să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .

5p c) Utilizând inegalitatea  $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$ , adevărată pentru orice  $x \in [1, e]$ , să se arate că  $\ln \frac{e^2+1}{2} \geq \frac{e+1}{e}$ .

① a)  $f'(x) = 2010x^{2009} + 2010^x \ln 2010, x \in \mathbb{R}$   
 b)  $f''(x) = 2010 \cdot 2009x^{2008} + 2010^x \cdot (\ln 2010)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbb{R}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = f''(0) = 2010^0 (\ln 2010)^2 = \ln^2 2010$

② a)  $\int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$   
 b)  $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx =$   
 $= \left[ \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right] \Big|_1^e = \ln e - \frac{1}{2} \ln(e^2+1) - \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 =$   
 $= 1 - \frac{1}{2} \ln(e^2+1) + \frac{1}{2} \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2}$

c)  $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}, \forall x \in [1, e] \Rightarrow \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e \frac{1}{2x^2} dx \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2} \leq -\frac{1}{2x} \Big|_1^e$   
 $1 - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2} \leq -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$   
 $-\frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2} \leq \frac{e-1}{2e} - \frac{1}{2}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$-\frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2} \leq \frac{e-1-2e}{2e} \Big| \cdot (-2)$

$\ln \frac{e^2+1}{2} \geq \frac{e+1}{e}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ .

5p a) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

5p c) Să se demonstreze că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$  avem  $\frac{2}{3} \leq f(x^4) + f(x^2) \leq 2$ .

2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

5p c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficelor funcțiilor  $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$  și  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  sunt egale.

① a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1 \Rightarrow y = 1$  asimptotă orizontală către  $-\infty$  la  $G_f$

b)  $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^3 - x^2 + 2x^2 + x - 2x^2 - x - 1 - x^3 + x^2 - 2x^2 - x - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^3 - x^2 + 2x^2 + x - 2x - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ ;  $f(1) = \frac{1}{3}$ ;  $f(-1) = 3$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	$x^2 \geq 0$ ; $x^4 \geq 0$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0, +\infty)$
$f(x)$	$1$	$\nearrow 3$	$\searrow \frac{1}{3}$	$\nearrow 1$	$\frac{1}{3} \leq f(x^2) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{3} \leq f(x^2) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq f(x^2) + f(x^4) \leq 2$   
 $\frac{1}{3} \leq f(x^4) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

② a)  $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \ln e + \ln 1 = \frac{e^2 - 3}{2}$

b)  $F$  o primitivă a funcției  $f \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (0, +\infty)$   
 $F''(x) = f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$  convexă pe  $(0, +\infty)$

c)  $g(x) = f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in [1, e]$   
 $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - x = -g(x), x \in [1, e]$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\text{Vol}(C_g) = \pi \int_1^e g^2(x) dx$

$\text{Vol}(C_h) = \pi \int_1^e h^2(x) dx = \pi \int_1^e [-g(x)]^2 dx = \pi \int_1^e g^2(x) dx = \text{Vol}(C_g)$

deci  $\text{Vol}(C_g) = \text{Vol}(C_h)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(0) = 1$ .

5p b) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

5p c) Să se arate că dacă  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a funcției  $f$ , atunci  $\int_0^2 \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1)$ .

① a)  $f'(x) = 2x + e^x$ ;  $f'(0) = 2 \cdot 0 + e^0 = 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + e^x}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + e^x)'}{(e^x)'} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + e^x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ .

c)  $f'(x) = 2x + e^x$   
 $f''(x) = (2x + e^x)' = 2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbb{R}$

② a)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x - x) dx = \left( e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - e^0 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$

b)  $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 (x e^x - x^2) dx = \int_0^1 x (e^x)' dx - \int_0^1 x^2 dx =$   
 $= x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \left( x e^x - e^x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e - e - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

c)  $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} f(\ln x) dx = \int_e^{e^2} (\ln x)' f(\ln x) dx =$   
 $= \int_e^{e^2} u'(x) f(u(x)) dx = F(u(x)) \Big|_e^{e^2} = F(\ln x) \Big|_e^{e^2} = F(\ln e^2) -$   
 $- F(\ln e) = F(2) - F(1)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)e^x$  și  $g(x) = xe^x$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției  $g$ .
- 5p c) Dacă  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, să se demonstreze că funcția  $g$  este crescătoare pe  $I$  dacă și numai dacă funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  și  $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x)g(x)dx$ .
- 5p c) Să se determine numărul real  $a \in (1, +\infty)$  astfel încât  $\int_1^a f(x)dx = 2$ .

① a)  $f'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) \stackrel{(-\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x'}{(\frac{1}{e^x})'} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\frac{e^x}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 \Rightarrow y=0$  asimptotă orizontală spre  $-\infty$  la  $G_f$

c)  $f'(x) = g(x) \Rightarrow f''(x) = g'(x)$ ,  $x \in I \subset \mathbb{R}$ .  
 dacă  $g$  crescătoare pe  $I \Rightarrow g'(x) > 0$  pe  $I \Rightarrow f''(x) > 0$  pe  $I \Rightarrow f$  convexă pe  $I$   
 dacă  $f$  -convexă pe  $I \Rightarrow f''(x) = g'(x) > 0$  pe  $I \Rightarrow g$  crescătoare pe  $I$

② a)  $f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = g(x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f$  este o primitivă a funcției  $g$

b)  $\int_1^e f(x)g(x)dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^e = \frac{1 \ln^2 x}{2x^2} \Big|_1^e =$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2 e}{e^2} - \frac{\ln^2 1}{1^2} \right) = \frac{1}{2e^2}$

c)  $\int_1^a f(x)dx = \int_1^a \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^a (\ln x)' \ln x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^a = \frac{\ln^2 a}{2}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\frac{\ln^2 a}{2} = 2 \Rightarrow \ln^2 a = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln a = \pm 2$ ;  $\ln a = -2 \Rightarrow a = e^{-2} \notin (1, +\infty)$ , nu convine  
 $\ln a = 2 \Rightarrow a = e^2$  soluție

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (0; 1) \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ .

5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

5p c) Să se arate că  $f(x) \geq \frac{3}{4}$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$  și  $g(x) = x \ln x$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$ .

5p b) Să se arate că  $\int_1^2 g(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ .

5p c) Să se arate că există  $x_0 \in (1; 2)$  astfel încât  $f(x_0) > g(x_0) + 3$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x) = 1 \\ \lim_{x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{c) } f'(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x}; & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$		$\frac{3}{4}$	$\uparrow$	

$$f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x > 0$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2 \ln x\right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} + 2 \ln 2 - \frac{1}{3} = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$$

$$\text{b) } \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x; g(x) = \frac{x^2}{2}$$

c) Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd  
Presupunem  $f(x) \leq g(x) + 3, \forall x \in (1, 2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 g(x) dx + 3 \Rightarrow 2 \ln 2 + \frac{7}{3} \leq 2 \ln 2 - \frac{3}{4} + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \ln 2 + \frac{7}{3} \leq 2 \ln 2 + \frac{9}{4} \text{ fals } \Rightarrow \exists x_0 \in (1, 2) \text{ astfel încât}$$

$$f(x_0) > g(x_0) + 3.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2 \ln x$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in [1, +\infty)$
- 5p b) Să se demonstreze că  $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$ .
- 5p c) Folosind faptul că  $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$ , oricare ar fi  $x \in [1, \sqrt{2}]$ , să se demonstreze inegalitatea  $x^2 - x \leq 2 \ln x$ , pentru orice  $x \in [1, \sqrt{2}]$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră  $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1} dx$ .

- 5p a) Să se arate că  $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

① a)  $f'(x) = (x - 2 \ln x)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x}$ ,  $x \in [1, +\infty)$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ;  $f(2) = 2 - 2 \ln 2$

$x$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow 2 - 2 \ln 2$	$\nearrow$

$f(2009) \leq f(2010) \Rightarrow 2009 - 2 \ln 2009 \leq 2010 - 2 \ln 2010$

$-2 \ln 2009 + 2 \ln 2010 \leq -2009 + 2010$   
 $2(\ln 2010 - \ln 2009) \leq 1$ ;  $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$

c)  $f$  descrescătoare pe  $[1, 2]$ ;  $[1, \sqrt{2}] \subset [1, 2] \Rightarrow f(x) \geq f(x^2)$ ,  $\forall x \in [1, \sqrt{2}]$

$x - 2 \ln x \geq x^2 - 2 \ln x^2$ ,  $\forall x \in [1, \sqrt{2}]$

$x - x^2 \geq 2 \ln x - 2 \ln x^2 \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - x \leq 2 \ln x^2 - 2 \ln x$ ,  $\forall x \in [1, \sqrt{2}] \Rightarrow x^2 - x \leq 2 \ln \frac{x^2}{x} = 2 \ln x$ ,  $\forall x \in [1, \sqrt{2}]$

② a)  $I_0 = \int_2^3 \frac{x^0}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

b)  $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) =$

c)  $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2} - x^n}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

$= \int_2^3 \frac{x^n(x^2-1)}{x^2-1} dx = \int_2^3 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ .

- 5p a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .
- 5p b) Să se demonstreze că  $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq f(x)$ , oricare ar fi  $x \in (1; +\infty)$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ .

2. Se consideră  $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)} dx$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ .
- 5p b) Utilizând identitatea  $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$  adevărată pentru orice  $x \neq 0$ , să se determine  $I_1$ .
- 5p c) Să se arate că  $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

1) a)  $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}, \forall x > 0$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x^2 - 2x + 1}{x^2(x+1)^2} = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{6}$ max	

$\Rightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(x), \forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq f(x), \forall x \in (1, +\infty)$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x})^2} = 1$

2) a)  $I_0 + I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2(x^2+1)} \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

b)  $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \left( \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln 4 - \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $I_n + I_{n-2} = \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{x^n(x^2+1)} + \frac{1}{x^{n-2}(x^2+1)} \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x^2}{x^n(x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^{-n+1} - 1}{-n+1} = \frac{1 - (\sqrt{3})^{-n+1}}{n-1} < \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-2)\ln x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$  și  $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2x}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = (x-2)' \ln x + (x-2) (\ln x)' = \ln x + \frac{x-2}{x}, \forall x > 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \ln 1 + \frac{1-2}{1} = -1$$

$$\text{c) } f''(x) = \left( \ln x + \frac{x-2}{x} \right)' = \frac{1}{x} + \frac{x-x+2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

deci  $f'$  - crescătoare pe  $(0, +\infty)$

$$\textcircled{2} \text{ a) } f'(x) = (\sqrt{x} + \ln x)' = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x+2}}{2x} = g(x), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$  este o primitivă a funcției  $g$

$$\text{b) } \int_1^4 f(x) g(x) dx = \int_1^4 f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^4 = \frac{f^2(4) - f^2(1)}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{4} + \ln 4)^2 - (\sqrt{1} + \ln 1)^2}{2} = \frac{(2 + \ln 4)^2 - 1}{2}$$

$$\text{c) } \int_1^4 g(x) f''(x) dx = \int_1^4 g(x) (f'(x))' dx = \int_1^4 g(x) \cdot g'(x) dx =$$

$$= \frac{g^2(x)}{2} \Big|_1^4 = \frac{g^2(4) - g^2(1)}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{4}+2}{2 \cdot 4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{1}+2}{2 \cdot 1}\right)^2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{1-9}{8} = \frac{-8}{8} = -1.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$

- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  și  $g(x) = x$ .

- 5p a) Să se determine  $\int f(\sqrt{x}) dx$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ .
- 5p c) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g^{99}(x) dx = \frac{e-1}{100}$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x}) = 1 + \sqrt{0} = 1$   
 $f(0) = 1 + \sqrt{0} = 1$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$  continuă în  $x_0 = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală către  $-\infty$  la  $f$

c)  $f(x) = 1 + \sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$   
 $f'(x) = (1 + \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $f''(x) = (\frac{1}{2\sqrt{x}})' = \frac{1 \cdot 2\sqrt{x} - 1 \cdot (2\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x})^2} = -\frac{2}{4x} = -\frac{1}{2x}$   
 $= -\frac{1}{2x} < 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  concavă pe  $(0, +\infty)$

② a)  $f(\sqrt{x}) = e^{(\sqrt{x})^2} = e^x, \forall x \geq 0$ ;  $\int f(\sqrt{x}) dx = \int e^x dx = e^x + C$

b)  $\int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e-1)$

c)  $f(x^{50}) = e^{(x^{50})^2} = e^{x^{100}}$ ;  $g(x) = x$

$\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g(x) dx = \int_0^1 e^{x^{100}} \cdot x dx = \frac{1}{100} \int_0^1 (e^{x^{100}})' dx =$

$= \frac{1}{100} e^{x^{100}} \Big|_0^1 = \frac{1}{100} (e-1)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ .
- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- 5p c) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + \dots + f(e^{x^{2009}})}{x^{2009}}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x^2 + 2x$  și  $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ .
- 5p a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției  $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x) - x^2 - 2x}{e^x + 1}$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+3) = 2+3 = 5$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0$   
 }  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow f$  nu este continuă în  $x_0 = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln e^{x^2} + \dots + \ln e^{x^{2009}}}{x^{2009}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2009}}{x^{2009}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{x^{2008}} + \frac{1}{x^{2007}} + \dots + 1 \right) = 1$

② a)  $F'(x) = \left( e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1 \right)' = e^x + \frac{3x^2}{3} + 2x = e^x + x^2 + 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$  - o primitivă a funcției  $f$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = e + \frac{1}{3} + 1 + 1 - 1 - 1 = \frac{3e+1}{3}$

c)  $h(x) = \frac{e^x + x^2 + 2x - x^2 - 2x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$

Aria  $(\Gamma_h) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big|_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln \frac{e+1}{2}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax-6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$ , unde  $a$  este parametru real.

- 5p a) Să se determine valoarea reală a lui  $a$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 4$ .  
5p b) Să se calculeze  $f'(9)$ .  
5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(9,3)$ .

2. Pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră funcțiile  $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = 1$  și  $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ .

- 5p a) Să se determine  $f_1(x)$ , unde  $x \in [0, \infty)$ .  
5p b) Să se demonstreze că  $\int_1^e f_1(x) \cdot \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ .  
5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f_2(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

① a)  $f$ -continuuă în  $x_0 = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4a - 6 = \sqrt{4} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

b)  $9 \in [4, +\infty)$ ;  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $x \geq 4$ ;  $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

c)  $f(9) = \sqrt{9} = 3$ ;  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ;  $y_0 = f(9) = 3$ ;  $f'(9) = \frac{1}{6}$   
 $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9)$ ;  $x - 6y + 9 = 0$

② a)  $f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt = \int_0^x 1 dt = t \Big|_0^x = x$

b)  $\int_1^e f_1(x) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$   
 $f(x) = \ln x$ ;  $f'(x) = \frac{1}{x}$   
 $g'(x) = x$ ;  $g(x) = \frac{x^2}{2}$   
 $= \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$

c)  $g(x) = f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$

$\text{Vol}(C_g) = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 \frac{x^4}{4} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{20}$

SUBIECTUL III (30p)

- 5p 1. a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$ .
- 5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12$ .
- 5p c) Se consideră funcția  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x^2 - 1) \ln x$ . Să se demonstreze că  $g(x) \geq 0$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$
- 5p a) Să se demonstreze că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x f(x^2)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=2$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 2x - 1)'}{(3x^2 - 4x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x - 4} = \frac{4}{2} = 2$

b)  $f'(x) = 4x^3 - 12x + 18$ ;  $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ ;  $f(1) = 25$   
 $f(-1) = -11$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$-11$	$\cap$	$25$	$\cup$
		$i$	$i$		

$f$ -convexă pe  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$   
 $f$ -concavă pe  $[-1, 1]$

c)  $\left. \begin{aligned} \text{f}t \ x \in (0, 1) &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ \ln x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) > 0 \\ \text{f}t \ x \in (1, +\infty) &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in (0, +\infty)$   
 $\text{f}t \ x = 1; g(1) = 0$

② a)  $\left. \begin{aligned} f \text{ continuă pe } \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = 0 \Rightarrow f \text{ continuă pe } \mathbb{R}$   
 deci  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \sqrt{x} \right) dx = \left( \ln(x+1) - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{2}{3}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $g(x) = -x f(x^2) = -x \left( \frac{1}{x^2+1} - \sqrt{x^2} \right) = -x \left( \frac{1}{x^2+1} - x \right) = \frac{x^4 + x^2 - x}{x^2+1} \geq 0, \forall x \geq 1$   
 $\text{Aria}(\Gamma_g) = \int_1^2 \frac{x^4 + x^2 - x}{x^2+1} dx = \int_1^2 \left( x^2 - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int_1^2 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx =$   
 $= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$  și  $g(x) = \frac{x-1}{e^x}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 0$
- 5p b) Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $g(x) - f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  și  $g(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x) dx$ .
- 5p c) Să se arate că există  $x_0 \in (0; 1)$  astfel încât  $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$ .

① a)  $g'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{2e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = \frac{2-2}{e^2} = 0$

b)  $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; f(0) = -1$

A(0; -1) punct de minim al funcției  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-$	$-1$	$+$

min

c)  $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2; g(2) = \frac{1}{e^2}$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$-$	$\frac{1}{e^2}$	$-$

max

$g(x) \leq \frac{1}{e^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) - f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

② a)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2$

b)  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = (x + \ln(x^2+1)) \Big|_0^1 = 1 + \ln 2$

c) Demonstrație prin reducere la absurd. Presupunem că

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\nexists x_0 \in (0; 1)$  a.î.  $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0 \Rightarrow f(x) > g(x) - 2x, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 (g(x) - 2x) dx \Rightarrow \ln 2 > 1 + \ln 2 - 1 \Rightarrow \ln 2 > \ln 2$  fals

deci  $\exists x_0 \in (0; 1)$  a.î.  $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$

- 5p a) Să se determine valoarea parametrului real  $a$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 1) \cdot x)$ .

2. Se consideră funcția  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ .

- 5p a) Să se determine funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $F$  să fie o primitivă pentru funcția  $f$ .
- 5p b) Să se demonstreze că funcția  $F$  este descrescătoare pe  $[0, +\infty)$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \frac{1}{2}$ .

① a)  $f$  continuă în  $x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3^x + 1) = 3 + 1 = 4$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 2) = a + 2$   
 $\Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 1) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$  asimptotă orizontală către  $-\infty$  la  $G_f$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 1) \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 1 - 1) \cdot x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x \cdot x$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x'}{(3^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-3^{-x} \ln 3} = \frac{1}{-\ln 3} = 0$

② a)  $F$  o primitivă pt  $f \Rightarrow f(x) = F'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$   
 $= \frac{-x^2 - 4x - 4 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}, x \in [0, +\infty)$

b)  $F'(x) = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2} < 0, \forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow F$  este descrescătoare pe  $[0, +\infty)$

c)  $F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

din b)  $\Rightarrow F(0) > F(x) > F(1) \Rightarrow F(1) \leq F(x) \leq F(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{6} dx \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2} dx \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \frac{1}{2}$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - 1$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)}$ .

5p c) Să se arate că  $e^{\sqrt{2009}} + \sqrt{2010} \leq e^{\sqrt{2010}} + \sqrt{2009}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$  și  $g(x) = f''(x)$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^2 (x+1)f(x) dx$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x) dx$ .

5p c) Să se determine primitiva funcției  $g$  a cărei asimptotă spre  $+\infty$  este dreapta de ecuație  $y = 2x$ .

① a)  $f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0; f(0) = 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$

min

$f$  crescătoare pe  $[0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(2009) \leq f(2010) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\sqrt{2009}} - \sqrt{2009} - 1 \leq e^{\sqrt{2010}} - \sqrt{2010} - 1 \Rightarrow e^{\sqrt{2009}} + \sqrt{2010} \leq e^{\sqrt{2010}} + \sqrt{2009}$

② a)  $\int_0^2 (x+1)f(x) dx = \int_0^2 (x+1) \frac{x^3}{x+1} dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{16}{4} = 4$ .

b)  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f''(x) dx = \int_0^1 (f'(x))' dx = f'(x) \Big|_0^1 = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} \Big|_0^1 =$   
 $f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{5}{4}$

c)  $G$  - primitivă a funcției  $g \Rightarrow G(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} + C, x \in [0, 1]$

$y = 2x$  asimptotă spre  $+\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = 2 = m$

$m = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [G(x) - mx] =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} + C - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} + C \right) = C + 1 = 0 \Rightarrow$   
 $= C = -1$

$G(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} - 1; x \in [0, +\infty)$  primitivă căutată

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - ex - 1$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x), x \in \mathbb{R}$ .
  - 5p b) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
  - 5p c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul  $O(0,0)$  și dreapta de ecuație  $x = 1$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
- 5p c) Să se demonstreze că dacă  $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$ , unde  $a, b, c$  sunt numere reale și funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a funcției  $f$ , atunci numerele  $F(a), F(b), F(c)$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

① a)  $f'(x) = (e^x - ex - 1)' = e^x - e, x \in \mathbb{R}$   
 b)  $f''(x) = (e^x - e)' = e^x > 0 \Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbb{R}$   
 c)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = 0; y_0 = f(0) = 0; f'(0) = 1 - e$   
 $y = (1 - e)x$  - ecuația tangentei  
 $\begin{cases} y = (1 - e)x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - e \end{cases}$  A(1; 1-e) punctul de intersecție

② a)  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f$  continuă în  $x_0 = 0$  }  $\Rightarrow f$  continuă pe  $\mathbb{R}$  deci  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

b)  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \Big|_0^1 =$   
 $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-3 + 6 + 8}{12} = \frac{11}{12}$

c)  $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx \Rightarrow F(b) - F(a) = F(c) - F(b) \Rightarrow$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\Rightarrow 2F(b) = F(a) + F(c) \Rightarrow F(b) = \frac{F(a) + F(c)}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \div F(a); F(b); F(c)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\sqrt{x} \geq 1 + \ln \sqrt{x}$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .

5p 2. a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 + t + 1) dt}{x^3 + 1}$ .

5p b) Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Să se determine primitiva  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , care verifică relația  $F(1) = 0$ .

5p c) Să se determine numărul real pozitiv  $a$  știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2$  este egal cu  $5\pi$ .

① a)  $f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$ ;  $x \in (0, +\infty)$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x=1$ ;  $f(1) = 1$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow$ 1 $\nearrow$	

$f$  descrescătoare pe  $(0, 1]$   
 $f$  crescătoare pe  $[1, +\infty)$   
 min

c)  $f(x) = 1$  minim  $\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 1, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(1) = 1 \Rightarrow \sqrt{x} - \ln \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 + \ln \sqrt{x}, \forall x > 0$

② a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 + t + 1) dt}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t) \Big|_0^x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 6x}{6(x^3 + 1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(2 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2})}{6x^3(1 + \frac{1}{x^3})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b)  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; F(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx + C = -\frac{1}{x} + C$   
 $F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{1} + C = 0 \Rightarrow C = 1$

$F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{x} + 1$

c)  $\text{Vol}(C_f) = \pi \int_0^1 (ax^2)^2 dx = \frac{\pi a^2 x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi a^2}{5}$

$\frac{\pi a^2}{5} = 5\pi \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 > 0$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ .
  - 5p c) Să se determine asimptota orizontală către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Pentru orice număr natural nenul  $n$  se consideră  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^x$  și  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .
- 5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \frac{1}{2}$ .
  - 5p b) Să se calculeze  $I_1$ .
  - 5p c) Să se demonstreze că  $I_n + nI_{n-1} = e$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

① a)  $f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}; x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = f'(-1) = \frac{-2}{(-1-1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{(x-1)'} = 1 \Rightarrow y = 1$   
asimptota orizontală către  $+\infty$  la  $G_f$

② a)  $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \int_0^1 e^{-x} \cdot x e^x dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

b)  $I_1 = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = e^1(x-1) \Big|_0^1 = +1$

c)  $I_n + nI_{n-1} = \int_0^1 x^n e^x dx + n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$   
 $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 x^n (e^x)' dx = x^n e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^n)' e^x dx =$   
 $= x^n e^x \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = x^n e^x \Big|_0^1 - n I_{n-1}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$I_n + nI_{n-1} = (x^n e^x \Big|_0^1 - n I_{n-1}) + n I_{n-1} = x^n e^x \Big|_0^1 = e^1 - 0^n e^0 = e, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

SUBIECTUL III (30p)

- 5p 1. a) Să se studieze continuitatea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Să se calculeze derivata funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$ .
- 5p c) Să se determine numărul real pozitiv  $a$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32$ .
2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră funcțiile  $f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int_1^2 f_0(x) dx$ .
- 5p b) Pentru  $n \in \mathbb{N}$  să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f_n$ , axa Ox și dreptele  $x=1$ ,  $x=2$ .
- 5p c) Știind că  $F$  este o primitivă a funcției  $f_1$ , să se arate că funcția  $G: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$  este crescătoare.

① a) 
$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x+1) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ nu este } \left. \begin{aligned} &\text{continuu} \\ &\text{în } x_0 = 1 \end{aligned} \right\}$$

b)  $g'(x) = 6x^2 - 30x + 24, x \in \mathbb{R}$ .

c) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x+a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})(x+a) = 2\sqrt{a} \cdot 2a = 4a\sqrt{a}$$

$$4a\sqrt{a} = 32; a\sqrt{a} = 8; a^3 = 64 \Rightarrow a = 4.$$

② a) 
$$\int_1^2 f_0(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

b) 
$$\text{aria}(f_n) = \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n} \right) dx =$$

$$= \left[ \ln x + \ln(x+1) + \ln(x+2) + \dots + \ln(x+n) \right] \Big|_1^2 = \left[ \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln(2+n) \right] -$$

$$= \left[ \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(1+n) \right] =$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln(2+n) - \ln 1 - \ln 2 - \ln 3 - \dots - \ln(1+n) =$$

$$= \ln(2+n)$$

c)  $F'(x) = f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$G'(x) = \left[ F(x) - \frac{5}{6}x \right]' = F'(x) - \frac{5}{6} = \frac{2x+1}{x(x+1)} - \frac{5}{6} = \frac{12x+6-5x^2-5x}{6x(x+1)}$$

$$= \frac{-5x^2 + 7x + 6}{6x(x+1)}$$

$\Delta = 49 + 120 = 169 \quad x_1 = 2$

$G'(x) \geq 0, \forall x \in [1, 2] \Rightarrow G$  este crescătoare pe  $[1, 2]$

**SUBIECTUL III (30p)**1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x - x \ln 2$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ .
- 5p c) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .
- 5p 2. a) Să se determine primitivele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ .
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)} dx$ .

① a)  $f'(x) = 2^x \ln 2 - \ln 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 2^3 \ln 2 - \ln 2 = 7 \ln 2$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln 2 (2^x - 1) = 0 \Rightarrow 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$   
 $f(0) = 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\searrow$ min	$\nearrow$

 $x = 0$  punct de minim

② a)  $\int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$

$$b) \text{Vol}(C_g) = \pi \int_1^e \left( \sqrt{\frac{\ln x}{x}} \right)^2 dx = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \pi \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx =$$

$$= \pi \int_1^e (\ln x)' \ln x dx = \pi \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \pi \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$c) \frac{1}{x(x+2)} = \frac{\frac{x+2}{x}}{x} + \frac{x}{x+2} = \frac{Ax + 2A + Bx}{x(x+2)} = \frac{x(A+B) + 2A}{x(x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)} dx = \int_1^3 \left( \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln x - \ln(x+2)) \Big|_1^3 =$$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 5) - \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 3) = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 5 + \ln 3) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x)$ .

5p c) Să se arate că dacă,  $a > 0$ , atunci  $\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(x+1)'(x-3) - (x+1)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{x-3 - x-1}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$ ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = \frac{-4}{(4-3)^2} = -4$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y = 1$  asimptotă orizontală  
 către  $+\infty$  la  $G_f$

② a)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

b)  $\text{Vol}(C_h) = \pi \int_0^2 h^2(x) dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \pi \int_0^2 (x+1)^{-2} dx =$   
 $= \pi \frac{(x+1)^{-1}}{-1} \Big|_0^2 = \pi \left( -\frac{1}{x+1} \right) \Big|_0^2 = \pi \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right) = \frac{2\pi}{3}$

c)  $\frac{1}{a+1+1} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{a+1}$ ,  $\forall a > 0; x \in [a, a+1]$   
 $\int_a^{a+1} \frac{1}{a+2} dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{x+1} dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{a+1} dx$

**BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2**

$$\frac{1}{a+2} \cdot x \Big|_a^{a+1} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1} \cdot x \Big|_a^{a+1}$$

$$\frac{1}{a+2} (a+1 - a) \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1} (a+1 - a)$$

$$\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in [1, +\infty)$ .

5p b) Să se studieze monotonia funcției  $f$  pe  $[1, +\infty)$ .

5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1, e)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$ .

5p a) Să se demonstreze că funcția  $f$  admite primitive.

5p b) Să se calculeze  $\int_{-3}^{-2} f(x) dx$ .

5p c) Să se arate că, pentru orice  $m \in [-1, \infty)$  aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=m$  și  $x=m+1$  este cel puțin  $\frac{5}{4}$ .

① a)  $f'(x) = e^x + \frac{(x-1)'x - (x-1)x'}{x^2} = e^x + \frac{x - x + 1}{x^2} = e^x + \frac{1}{x^2}; x \in [1, +\infty)$

b)  $f'(x) > 0, \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$  este strict crescătoare

c)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = 1; y_0 = f(1) = e; f'(1) = e + 1$

$y - e = (e + 1)(x - 1); y - e = ex + x - e - 1; x(e + 1) - y - 1 = 0$

② a)  $f$  - continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 5) = 4$

$x < -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x^2 + 1) = 4$

$x > -1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow f$   
 continuă și în  $x_0 = -1$ ,  
 deci  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$  admite primitive

b)  $\int_{-3}^{-2} f(x) dx = \int_{-3}^{-2} (x + 5) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-3}^{-2} = \left( \frac{4}{2} - 10 \right) - \left( \frac{9}{2} - 15 \right) =$   
 $= \frac{4}{2} - 10 - \frac{9}{2} + 15 = \frac{2}{2} - \frac{5}{2} = \frac{10 - 5}{2} = \frac{5}{2}$

c)  $\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_m^{m+1} (3x^2 + 1) dx = \left( \frac{3x^3}{3} + x \right) \Big|_m^{m+1} = (m+1)^3 + (m+1) - m^3 - m =$   
 $= 3m^2 + 3m + 2$

**BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2**

$g(m) = 3m^2 + 3m + 2; m \geq -1; g'(m) = 6m + 3; 6m + 3 = 0; m = -\frac{1}{2}$

$m$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(m)$	-	0	+
$g(m)$		$\frac{5}{4}$	

$g(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow g(m) \geq \frac{5}{4}, \forall m \geq -1$   
 $\text{Aria}(\Gamma_f) \geq \frac{5}{4}, \forall m \in [-1, +\infty)$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  și  $h(x) = f^2(x)$ .

- 5p a) Să se verifice că  $h'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că funcția  $h$  este crescătoare pe intervalul  $[0; +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$ .

- 5p a) Să se arate că  $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x) dx = \frac{22}{3}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p c) Să se determine numărul real pozitiv  $k$  astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=k$  să fie egală cu  $k + \ln k$ .

① a)  $h(x) = f^2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ;  $h'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ ;  $\forall x \geq 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \Rightarrow y = 1$  asimpt. tota orizontală către  $+\infty$  la  $G_f$

c)  $h'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \geq 0, \forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow h$  crescătoare pe  $[0, +\infty)$

② a)  $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x) dx = \int_0^1 (x+1)(x+3) \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1 \right) dx =$   
 $= \int_0^1 (x+1)(x+3) \frac{x+3-x-1+x^2+4x+3}{(x+1)(x+3)} dx = \int_0^1 (x^2+4x+5) dx =$   
 $= \left( \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 2 + 5 = \frac{1+6+15}{3} = \frac{22}{3}$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1 \right) dx = \left( \ln(x+1) - \ln(x+3) + x \right) \Big|_0^1 =$   
 $= (\ln 2 - \ln 4 + 1) - (\ln 1 - \ln 3 + 0) = \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 + 1 =$   
 $= \ln \frac{2 \cdot 3}{4} + 1 = \ln \frac{3}{2} + 1$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $Aria(\Gamma_f) = \int_0^k f(x) dx = \left( \ln(x+1) - \ln(x+3) + x \right) \Big|_0^k = \ln(k+1) - \ln(k+3) + k + \ln 3 = \ln \frac{(k+1) \cdot 3}{k+3} + k$   
 $\left. \begin{aligned} &= k + \ln k \\ & \Rightarrow \frac{3(k+1)}{k+3} = k; \quad k^2 = 3; \quad k > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = \sqrt{3}$   
 $Aria(\Gamma_f) = k + \ln k$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $f(x) + f(x^3) \geq -2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .
- 5p c) Să se determine numărul real  $p$  astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(px)$ , pentru orice  $x \in [0,1]$  să fie minim.

① a)  $f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow -2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ ;  $f(1) = 1$   
 $f(-1) = -1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$
$f(x)$	$0$	$\searrow$ min	$\nearrow$ max	$0$

$A(-1, -1)$  punct de minim  
 $B(1, 1)$  punct de maxim

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$  (din b)  
 $f(x^3) \geq -1, \forall x^3 \in \mathbb{R}$

② a)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+2) dx = \left. \frac{x^2}{2} + 2x \right|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

b)  $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x (x+2) dx = \int_0^1 (e^x)' (x+2) dx = e^x (x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (x+2)' dx = (e^x(x+2) - e^x) \Big|_0^1 = e^x(x+2-1) \Big|_0^1 = e^x(x+1) \Big|_0^1 = e(1+1) - e^0 \cdot 1 = 2e - 1$

c)  $h(x) = f(px) = px + 2$ ;  $\text{Vol}(C_h) = \pi \int_0^1 (px+2)^2 dx = \pi \int_0^1 (p^2 x^2 + 4px + 4) dx = \pi \left( \frac{p^2 x^3}{3} + 2px^2 + 4x \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{p^2}{3} + 2p + 4 \right) = \frac{\pi}{3} (p^2 + 6p + 12)$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$g(p) = p^2 + 6p + 12$ ;  $\Delta = -12$ ;  $g_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{12}{4} = 3$ .  
 $\left\{ \begin{array}{l} p_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3 \\ \text{Vol}_{\min} = \frac{\pi}{3} \cdot 3 = \pi \text{ \textit{și} } p = -3. \end{array} \right.$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$

5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că  $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$ , oricare ar fi  $x \in [0; +\infty)$ .

5p 2. a) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} dx$ .

5p b) Să se demonstreze că  $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$ .

5p c) Se consideră funcția  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  și numerele reale pozitive  $a, b$  și  $c$ . Să se

demonstreze că, dacă numerele  $\int_1^a f(x) dx$ ,  $\int_1^b f(x) dx$ ,  $\int_1^c f(x) dx$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele  $a, b, c$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

① a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{3}{2}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f$  cont. în  $x_0 = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = 2 \Rightarrow y = 2$  asimpt. orizontala către  $+\infty$  la  $G_f$

c)  $x \in [0; +\infty)$ ;  $f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$  crescătoare pe  $[0; +\infty) \Rightarrow f(0) \leq f(x), \forall x \in [0; +\infty)$

$f(0) = \frac{3}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  deci  $f(x) \in \left[\frac{3}{2}; 2\right), \forall x \in [0; +\infty)$

② a)  $\frac{1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A}{x(x+2)}$   $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$   $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x+2)] \Big|_1^2 =$   
 $= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$

b)  $\frac{x}{x+1} \leq 1, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq \int_0^1 dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq x \Big|_0^1 \Rightarrow$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $\int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln a$ ;  $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b$ ;  $\int_1^c \frac{1}{x} dx = \ln c \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$ ,

$\ln a; \ln b; \ln c \Leftrightarrow \ln a + \ln c = 2 \ln b \Leftrightarrow \ln(a \cdot c) = \ln b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ac = b^2 \Leftrightarrow \therefore a, b, c$

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  și  $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x) - g'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 0$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$  și  $F(x) = e^x + x - \ln x$ .
- 5p a) Să se demonstreze că funcția  $F$  este o primitivă pentru funcția  $f$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_1^2 x(F(x) - x + \ln x) dx$ .
- 5p c) Să se determine parametrul real  $m$  astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$  să fie egală cu  $e^m - 2$ .

① a)  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ;  $g'(x) = 3x^2 - 10x + 8$ ;  $f'(x) - g'(x) = 3x^2 - 6x - 3x^2 + 10x - 8 = 4x - 8$ ,  $x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 - 10x + 8} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 6}{6x - 10} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-1)}{2(3x-5)} = \frac{6(2-1)}{2(6-5)} = \frac{6}{2} = 3.$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$ ;  $f(0) = 4$ ;  $f(2) = 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$\nearrow$
		max	min	

$\left. \begin{array}{l} f \text{ descrescătoare pe } [0, 2] \\ f \text{ crescătoare pe } [2, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) \geq f(2), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$

② a)  $F'(x) = (e^x + x - \ln x)' = e^x + 1 - \frac{1}{x} = e^x + \frac{x-1}{x} = f(x), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow F$  este o primitivă a lui  $f$

b)  $\int_1^2 x(F(x) - x + \ln x) dx = \int_1^2 x(e^x + x - \ln x - x + \ln x) dx = \int_1^2 x e^x dx =$   
 $= \int_1^2 x (e^x)' dx = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 x' e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 = e^x(x-1) \Big|_1^2 = e^2$

c)  $\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e F'(x) dx = F(x) \Big|_1^e = F(e) - F(1) = e + e - \ln e - e - 1 + \ln 1 = e - 2$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\text{Aria}(\Gamma_f) = e^m - 2$

$e^m - 2 = e^e - 2 \Rightarrow m = e$

**SUBIECTUL III (30p)**1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 3x$ .5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .5p b) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ .2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ 5p a) Să se demonstreze că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 (x-2)f(x)dx$ .5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (f(t)+2) dt$ .

① a)  $f'(x) = 3x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$

b)  $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  crescătoare pe  $\mathbb{R}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x^2})}{x^3} = 1$ .

② a)  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1+1}{1-2} = -2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \ln 1 - 2 = -2$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f$  continuă  
 în  $x_0 = 1$  deci  $f$  continuă  
 pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive  
 pe  $\mathbb{R}$

$$b) \int_0^1 (x-2)f(x)dx = \int_0^1 (x-2) \frac{x+1}{x-2} dx = \int_0^1 (x+1)dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (\ln t - 2 + 2) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \ln t dt =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x t^1 \ln t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( t \ln t \Big|_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( x \ln x \Big|_1^x - \int_1^x 1 dt \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( x \ln x - x + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( x \ln x - x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x \ln x}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

5p c) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^n$ .

5p a) Pentru  $n=2$  să se calculeze  $\int_1^2 f(x) dx$ .

5p b) Pentru  $n=-1$  să se determine  $a \in [0; +\infty)$  astfel încât  $\int_0^a f(x) dx = 0$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x)f(x) dx$ .

① a)  $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{2} = \frac{1}{x} + x, x \in (0, +\infty)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$

c)  $f''(x) = \left(\frac{1+x^2}{x}\right)' = \frac{2x \cdot x - (1+x^2)}{x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; x \in (0, +\infty)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1; f(1) = \frac{1}{2}; -1 < 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	

$f$  - concavă pe  $(0, 1]$   
 $f$  - convexă pe  $[1, +\infty)$

② a)  $\int_1^2 (1+x)^2 dx = \int_1^2 (1+2x+x^2) dx = \left(x + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2 = \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2$

$= 2 + 4 + \frac{8}{3} - 1 - 1 - \frac{1}{3} = 4 + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}$

b)  $n = -1; \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (1+x)^{-1} dx = \int_0^a \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^a =$   
 $= \ln(1+a); \ln(1+a) = 0 \Rightarrow 1+a = 1 \Rightarrow a = 0$

c)  $\int_0^1 f'(x)f(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{(1+x)^{2n}}{2} \Big|_0^1 = \frac{2^{2n}}{2} - \frac{1}{2}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \sqrt{x}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .

5p c) Să se determine coordonatele punctului graficului funcției  $f$ , în care tangenta la grafic are panta egală cu  $\frac{3}{2}$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int (x+1)(x+2)f(x)dx = x^2 + 3x + C$ ,  $x \geq 0$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) - f(x+1) - \frac{1}{x+1}$ .

① a)  $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $x \in (0, +\infty)$

b)  $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  crescătoare pe  $(0, +\infty)$

c)  $m = f'(x_0) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ;  $1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{3}{2}$ ;  $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 1$ .  
 $f(1) = 2$ ;  $A(1; 2)$

② a)  $\int (x+1)(x+2)f(x)dx = \int (x+1)(x+2) \cdot \frac{x+2+x+1}{(x+1)(x+2)} dx = \int (2x+3)dx =$   
 $= 2 \frac{x^2}{2} + 3x + C = x^2 + 3x + C$

b)  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[ \ln(x+1) + \ln(x+2) \right] \Big|_0^1 =$   
 $= \ln 2 + \ln 3 - \ln 1 - \ln 2 = \ln 3$

c)  $h(x) = \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) - \left( \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) - \frac{1}{x+1} =$   
 $= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+3}$

$V_{\text{rot}}(C_h) = \pi \int_0^1 h^2(x) dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2} dx = \pi \int_0^1 (x+3)^{-2} dx =$

$= \pi \frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1} \Big|_0^1 = \pi \cdot \frac{(x+3)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = \pi \left( -\frac{1}{x+3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) =$   
 $= \frac{\pi}{12}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  se consideră funcțiile  $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = \ln x$  și  $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$ .

- 5p a) Să se determine funcția  $f_1$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $f_2$ .
- 5p c) Să se arate că  $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$ .
- 5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției  $f$  este funcție crescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$ .

① a)  $f_1(x) = f'_0(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}; x \in (0, +\infty)$

b)  $f_2(x) = f'_1(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală către  $+\infty$ , la  $G_{f_2}$

c)  $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$

$g : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln x - x + 1$ ;  $g'(x) = \frac{1}{x} - 1, \forall x \in (0, +\infty)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1; g(1) = 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$		-	-

max

$\Rightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \ln x - x + 1 \leq 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1, \forall x \in (0, +\infty)$

② a)  $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) \Big|_0^{\sqrt{e-1}} =$

$= \ln(1+e-1) - \ln 1 = \ln e = 1$ .

b)  $F$ -primitivă a lui  $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow F$  crescătoare pe  $(0, +\infty)$

c)  $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \ln(1+x^2) \Big|_0^2 = \ln 5$   
 $\int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx = \ln(1+x^2) \Big|_2^4 = \ln 17 - \ln 5 =$

$\ln 5 > \ln \frac{17}{5} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- 5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ .

- 5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ .

- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$ .

① a)  $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ ;  $x \in \mathbb{R}^*$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{3}{1^2} = 3 - 3 = 0$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - \frac{1}{x^2}) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-4$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max		min	

$f$  crescătoare pe  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$   
 $f$  descrescătoare pe  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

② a)  $\text{Vol}(C_f) = \pi \int_0^1 (x\sqrt{2-x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x^2 - x^4) dx = \left( \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \pi = \frac{7\pi}{15}$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x\sqrt{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (2-x^2)' \sqrt{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \frac{(2-x^2)^{3/2}}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \left( \frac{(2-1)^{3/2}}{2} - \frac{(2-0)^{3/2}}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} (2-t^2)\sqrt{2-t^2} \Big|_0^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} (2-x^2)\sqrt{2-x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} (2-x^2)\sqrt{2-x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\sqrt{2-x^2} + (2-x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-x^2}}{2x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-x^2})}{2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ \frac{2x+a}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

- 5p a) Să se determine numărul real  $a$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 1$ .  
 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $-\infty$  la graficului funcției  $f$ .  
 5p c) Să se determine numărul real  $a$  astfel încât panta tangentei la grafic în punctul  $(2; f(2))$  să fie egală cu 1.

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

5p c) Să se demonstreze că  $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$ .

① a)  $f$  continuă în  $x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2+a}{3} \Rightarrow 2+a=6 \Rightarrow a=4.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x^2+1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \Rightarrow y=1$  asimptotă orizontală către  $-\infty$

c)  $m = f'(2) = 1$ ;  $f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+a) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2+4-4x^2-2ax}{(x^2+2)^2} =$   
 $= \frac{-2x^2-2ax+4}{(x^2+2)^2}$ ;  $f'(2) = \frac{-8-4a+4}{36}$ ;  $\frac{-4a-4}{36} = 1$ ;  $-4a = 40$   
 $a = -10$

② a)  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 e^{(\sqrt{x})^2} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$

b)  $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' e^{x^2} dx =$   
 $= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1)$

c)  $f'(x) = (e^{x^2})' = 2x e^{x^2} \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f$  crescătoare pe  $[0, 1] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1), \forall x \in [0, 1] \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq e, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$\Rightarrow \int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e dx \Rightarrow x \Big|_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq ex \Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f, h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2)$  și  $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

- 5p a) Să se arate că  $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ .
- 5p b) Să se demonstreze că funcția  $h$  este descrescătoare pe  $(-\infty; 1)$ .
- 5p c) Să se arate că  $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} + x + 1$ .

- 5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$ .
- 5p b) Să se determine primitiva  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , care verifică condiția  $F(0) = 1$ .

- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}}$ .

① a)  $f'(x) = (x-1)'(x-2) + (x-1)(x-2)' = (x-2) + (x-1)$   
 $h(x) = \frac{(x-2) + (x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} + \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

b)  $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow h$  descrescătoare pe  $(-\infty, 1)$

c)  $h'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$   
 $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow h'(x) = \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} =$   
 $= \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \Rightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 < 0 \Rightarrow (f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

② a)  $\text{Vol}(C_h) = \pi \int_1^3 (x^{2009} + x + 1 - x^{2009} - 1)^2 dx = \pi \int_1^3 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \pi \left( 9 - \frac{1}{3} \right) = \frac{26\pi}{3}$

b)  $\int f(x) dx = \frac{x^{2010}}{2010} + \frac{x^2}{2} + x + C; F(0) = 1 \Rightarrow C = 1 = \frac{26\pi}{3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{x^{2010}}{2010} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^x}{x^{2010}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^{2010}}{2010} + \frac{x^2}{2} + x}{x^{2010}} =$

**BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2**

$\frac{26\pi}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2010} \left( \frac{1}{2010} + \frac{1}{2x^{2008}} + \frac{1}{x^{2009}} \right)}{x^{2010}} = \frac{1}{2010}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ -2x+1, & x > 0 \end{cases}$ .

5p a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ .

5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0)$ .

5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(-1, \frac{1}{2})$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcția  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = 1$ .

5p b) Să se determine primitiva  $G$  a funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$ , care verifică relația  $G(1) = \frac{13}{15}$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

① a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+1} = 1$ ,  $\lim_{x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+1} = 1$ ,  $\lim_{x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x+1) = 1$ ,  $f(0) = 1$ .  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$  continuă în  $x_0 = 0$

b)  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$  crescătoare pe  $(-\infty, 0)$

c)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = -1; y_0 = \frac{1}{2}; f'(-1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$   
 $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 1); x - 2y + 2 = 0$  ec. tangentei

② a)  $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = \int_1^e \frac{1}{(\sqrt{x-1})^2+1} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e = 1$ .

b)  $g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} = x^4 + 2x^2 + 1; \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$   
 $G(1) = \frac{13}{15} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + C = \frac{13}{15} \Rightarrow C = -1$

c)  $G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x - 1$   
 $\int_0^1 x f_n(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-n+1}}{-n+1} \Big|_0^1$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{2^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1^{-n+1}}{-n+1} \right) = \frac{2^{-n} - 1}{2(1-n)}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$ , pentru orice  $x \in (0; +\infty)$ .

5p b) Să se arate că  $2009\sqrt{2011} \leq 2010\sqrt{2010}$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  nu are asimptotă către  $+\infty$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x < 1 \\ (x+1)\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{6}$ .

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției

$h: [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(x-1)' \sqrt{x} - (x-1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x + 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}, x > 0$

b)  $f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  crescătoare pe  $(0, +\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(2010) \leq f(2011) \Rightarrow \frac{2010-1}{\sqrt{2010}} \leq \frac{2011-1}{\sqrt{2011}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2009\sqrt{2011} \leq 2010\sqrt{2010}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$   $f$  asimptotă orizontală către  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x\sqrt{x}} = 0 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$   $f$  asimptotă oblică spre  $+\infty$

② a)  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0; \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 2 \ln 1 = 0; f(1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$  continuă și în  $x_0 = 1$ , deci  $f$  cont. pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x - 2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{7}{6}$

c)  $\text{Vol}(C_h) = \pi \int_1^e \left( \frac{(x+1)\ln x}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \pi \left( x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) =$   
 $f(x) = \ln^2 x; f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \ln x$   
 $g(x) = 1; g'(x) = x$   
 $= \pi \left( x \ln^2 x \Big|_1^e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2x \Big|_1^e \right) =$   
 $= \pi (e - 2e + 2e - 2) = \pi (e - 2)$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-3)\ln x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

5p c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcțiile  $F, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x \cdot e^x$  și  $f(x) = (x+1)e^x$ .

5p a) Să se verifice că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $F$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx$ .

① a)  $f'(x) = (x-3)' \ln x + (x-3)(\ln x)' = \ln x + (x-3) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x-3}{x}$ ,  $x > 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \ln 1 + \frac{1-3}{1} = -2$

c)  $f''(x) = \left( \ln x + \frac{x-3}{x} \right)' = \frac{1}{x} + \frac{x-x+3}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} > 0$ ,  $\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f$  convexă pe  $(0, +\infty)$

② a)  $F'(x) = (x e^x)' = x' e^x + x (e^x)' = e^x + x e^x = (x+1)e^x = f(x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow F$  este o primitivă a funcției  $f$

b) aria  $(\Gamma_F) = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 e^x dx =$   
 $= (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$

c)  $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x e^x - (x+1)e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x e^x - x e^x - e^x}{e^x + 1} dx =$   
 $= - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = - \int_0^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = - \ln(e^x + 1) \Big|_0^1 = - \ln(e+1) +$   
 $+ \ln(1+1) = \ln \frac{2}{e+1}$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că  $f(\sqrt[3]{2008}) \leq f(\sqrt[3]{2009})$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x$  și  $g(x) = x \cdot e^x$ .

5p a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}; \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = 1 \Rightarrow y=1$  asimptotă orizontală către  $+\infty$  la  $G_f$

c)  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  crescătoare pe  $(0, +\infty)$   
 $0 < \sqrt[3]{2008} \leq \sqrt[3]{2009} \Rightarrow f(\sqrt[3]{2008}) \leq f(\sqrt[3]{2009})$

② a)  $\int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

b)  $\text{Aria}(G_g) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 =$   
 $= e - e + e^0 = 1.$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x 2^t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^t \Big|_0^x}{x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} =$   
 $= \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{1} =$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$= \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^0 \ln 2 = 1.$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + 3^x$ .

- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine asimptota spre  $-\infty$  a funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) \cdot f_2(x) dx$ . ??  $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) f_2(x) dx$
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f_1$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p c) Să se arate că  $\int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln 2$ .

① a)  $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$ ;  $x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 3^x) = 0 \Rightarrow y=0$  asimptotă orizontală spre  $-\infty$  la  $G_f$

c)  $f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  - convexă pe  $\mathbb{R}$

② a)  $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) \cdot \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$  ??

b)  $Aria(\Gamma_{f_1}) = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = (x - \ln(x+1)) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$

c)  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{2009} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{2009}}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ ;  $x+1 > 0, \forall x \in [0,1]$

$\int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \Rightarrow \int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln(x+1) \Big|_0^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln 2$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 4$ , pentru orice  $x \in (1; +\infty)$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră funcțiile  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int f_0(x) dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f_1$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se arate că  $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

① a)  $f'(x) = 1 + \frac{1'(x-1) - 1 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ ;  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x-1)} \right) = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{1}{x-1} - x \right) = 1$

$y = mx + n$ ;  $y = x + 1$  - asimptota oblică spre  $+\infty$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & f(0) = 0 \\ x_2 = 2 & f(2) = 4 \end{cases}$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\nearrow 0$	$\searrow$	$\swarrow 4$	$\nearrow$
		max		min	

$\Rightarrow f(x) \geq 4, \forall x \in (1, +\infty)$

② a)  $\int f_0(x) dx = \int \frac{e^x}{2} dx = \frac{e^x}{2} + C$

b) aria  $(r_{f_1}) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big|_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln \frac{e+1}{2}$

c)  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{nx} + 1 \leq e^{(n+1)x} + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{nx} + 1} \geq \frac{1}{e^{(n+1)x} + 1} \cdot e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{e^x}{e^{nx} + 1} \geq \frac{e^x}{e^{(n+1)x} + 1} \Rightarrow f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \Rightarrow \int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$

$\leq \int_0^1 f_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1; -1)$ .

5p c) Să se arate că  $f(x) \geq -1$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcția  $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_a(x) = ax + 1$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

5p a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x^2 + x + 1$  să fie o primitivă a funcției  $f_a$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 e^x f_1(x) dx$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 f_a^2(x) dx \geq \frac{1}{4}$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

① a)  $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \forall x > 0$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -1; \quad f'(1) = 0$   
 $y + 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 0$  ecuația tangentei

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x^4 = x^3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x_1 = 1; \quad (x_2 = x_3 = x_4 = 0 - \text{nu carvine}) \quad f(1) = -1$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- - 0 + +	
$f(x)$		$\searrow -1$	$\nearrow$

min

$f(x) \geq -1, \forall x \in (0, +\infty)$

② a)  $F'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1 \quad \} \Rightarrow a = 2$   
 $F'(x) = f_a'(x) = ax + 1$

b)  $\int_0^1 e^x f_1(x) dx = \int_0^1 e^x (x + 1) dx = \int_0^1 (x + 1)(e^x)' dx = (x + 1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = ((x + 1)e^x - e^x) \Big|_0^1 = xe^x \Big|_0^1 = e$

c)  $\int_0^1 f_a^2(x) dx = \int_0^1 (ax + 1)^2 dx = \left( \frac{a^2 x^3}{3} + 2a \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 =$   
 $= \frac{a^2}{3} + a + 1 = \frac{1}{3} (a^2 + 3a + 3) = \frac{1}{3} \left( a + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}, \forall a \in \mathbb{R}$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ , pentru orice  $x > 0$ .
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1; -2)$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3$  pentru orice  $x > 0$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = e^{x^n}$ .

- 5p a) Să se determine  $\int_0^1 f_1(x) dx$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 x \cdot f_1(x) dx$ .
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x \cdot f_3(x)$ .

① a)  $f'(x) = (x-3)' \sqrt{x} + (x-3)(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + (x-3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ ;  $\forall x > 0$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ;  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = -2$ ;  $f'(1) = 0$   
 $y + 2 = 0(x - 1) \Rightarrow y + 2 = 0$  - ecuația tangentei

c)  $g(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ ;  $x > 0$ ;  $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$   
 $g'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ ;  $g(1) = 3$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		↘ 3 ↗	

$\Rightarrow g(x) \geq 3, \forall x > 0 \Rightarrow x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3, \forall x > 0$

② a)  $\int f_1(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$

b)  $\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x(x-1) \Big|_0^1 = e(1-1) - e^0(0-1) = 1$ .

c)  $\text{Vol}(C_g) = \pi \int_0^1 (x \cdot e^{x^3})^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 (2x^3)' e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \pi e^{2x^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \pi (e^2 - e^0) = \frac{\pi(e^2 - 1)}{6}$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

5p c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se determine  $\int f(x) dx$ , unde  $x > 0$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in [1, 2]$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) \ln x dx$ .

① a)  $f'(x) = 3^x \ln 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} = 3^x \ln 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 3^0 \ln 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \ln 2 = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$

c)  $f'(x) = 3^x \ln 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  crescătoare pe  $\mathbb{R}$

② a)  $\int f(x) dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln x + C, x > 0$

b)  $\text{Vol}(C_g) = \pi \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx =$   
 $= \pi \left( \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right) \Big|_1^2 = \pi \left( \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 =$   
 $= \pi \left( \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + 1 \right) = \pi \cdot \frac{16 + 24 - 3 - 2 - 12 + 6}{6} = \pi \cdot \frac{29}{6}$

c)  $\int_1^e f(x) \ln x dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx =$   
 $= \int_1^e \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx + \int_1^e (\ln x)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx +$   
 $+ \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{\ln^2 x}{2} \right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$   
 $= \frac{e^2 + 3}{4}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că  $f(x) \geq \frac{1}{e}$  pentru orice  $x \leq 2$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

- 5p a) Să se determine  $\int f^2(x) dx$ .
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p c) Folosind, eventual, faptul că  $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$  pentru orice  $x \in [0,1]$ , să se arate că  $\int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2010}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{(2x-1)e^x - (x^2-x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{(2x-1-x^2+x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2+3x-2}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+1}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \Rightarrow y=0$  asimpt. orizontala spre  $+\infty$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+3x-2=0; \Delta=1; x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\infty$	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	$\frac{3}{e^2}$	0
		min	max	

$\Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{e}, \forall x \leq 2$

② a)  $\int f^2(x) dx = \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

b)  $Aria(\Gamma_f) = \int_0^1 \sqrt{x+2} dx = \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^1 = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (x+2)\sqrt{x+2} = \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

c)  $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^{2009} f(x) \leq x^{2009} \sqrt{3} \Rightarrow \int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \int_0^1 x^{2009} \sqrt{3} dx \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \frac{x^{2010}}{2010} \sqrt{3} \Big|_0^1 \Rightarrow \int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2010};$

$\forall x \in [0,1]$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = e^x + e^{-x}$ .

- 5p a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $h(x) = x f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x > 0$

b)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$y = mx + n$ ;  $y = x$  asimptotă oblică spre  $+\infty$

c)  $f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} > 0,$

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  convexă pe  $(0, +\infty)$

② a)  $\int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$

b)  $Aria(\Gamma_h) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$   
 $= e^x(x-1) \Big|_0^1 = e(1-1) - e^0(0-1) = 1.$

c)  $Vol(C_g) = \pi \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) dx =$   
 $= \pi \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \pi \left( \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^1 =$   
 $= \pi \left( \frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^0}{2} + \frac{e^0}{2} \right) = \pi \left( \frac{e^2}{2} + 2 - \frac{1}{2e^2} \right)$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .

5p c) Să se arate că  $\ln x \leq \frac{x}{e}$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ .

5p c) Folosind, eventual, faptul că  $\sqrt{x} \geq x$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ , să se arate că  $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \forall x > 0$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = e; y_0 = \frac{1}{e}; f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0$   
 $y - \frac{1}{e} = 0(x - e) \Rightarrow y - \frac{1}{e} = 0$  - ec. tangentei

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e; f(e) = \frac{1}{e}$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow$

max

$f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x > 0$

$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}; \forall x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x \leq \frac{x}{e}, \forall x > 0$

② a)  $\int f(x) dx = \int (1 - x^{\frac{1}{2}}) dx = x - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$

b)  $V_{\text{rot}}(C_f) = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \pi \left( x - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$   
 $= \pi \left( x - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left( 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \pi \frac{6-8+3}{6} = \frac{\pi}{6}$

c)  $\sqrt{x} \geq x, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow -\sqrt{x} \leq -x \Rightarrow 1 - \sqrt{x} \leq 1 - x, \forall x \in [0, 1]$

$\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^{2009} dx \leq \int_0^1 (1 - x)^{2009} dx \Rightarrow \int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq -\frac{(1-x)^{2010}}{2010} \Big|_0^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$ .

- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = (x+1)(x+3) \cdot e^x$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $f(-2) + f(-4) \leq \frac{8}{e^3}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ .

- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive.
- 5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe  $(1; +\infty)$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int_0^e f(x) dx$ .

① a)  $f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (2x+2+x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x = (x+1)(x+3)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+1}{e^{-x}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{-e^{-x}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -3 \Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală spre  $-\infty$   
 $f(-1) = 0; f(-3) = 4e^{-3} = \frac{4}{e^3}$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$+\infty$	$f(-2) \leq \frac{4}{e^3}$ $f(-4) \leq \frac{4}{e^3}$	$\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow$		
$f'(x)$		+	0	-			0	+
$f(x)$		$\nearrow \frac{4}{e^3}$ max	$\searrow 0$ min	$\nearrow$				

$\Rightarrow f(-2) + f(-4) \leq \frac{8}{e^3}$

② a)  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 1 = 0; f(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f$  continuă și în  $x_0 = 1$  deci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive

b)  $x \in (1, +\infty)$   $F$  primitivă a lui  $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \ln x$

$F''(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow F$  convexă pe  $(1, +\infty)$

c)  $\int_0^e f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^e \ln x dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 + \int_1^e (x)' \ln x dx =$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$= \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = \frac{5}{6} + (x \ln x - x) \Big|_1^e = \frac{5}{6} + e - e + 1 = \frac{11}{6}$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .



- 5p a) Să se calculeze  $f'(1)$ .  
 5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției  $f$ .  
 5p c) Să se arate că  $f(x) \leq 3$ , pentru orice  $x \leq 2$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$  și  $F(x) = x + \frac{1}{x}$ .

- 5p a) Să se verifice că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .  
 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=2$ .  
 5p c) Să se calculeze  $\int_1^e F(x) \cdot \ln x \, dx$ .

① a)  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ;  $f'(1) = 3 - 3 = 0$

b)  $f''(x) = 6x$ ;  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ;  $f(0) = 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$			

$f$  concavă pe  $(-\infty, 0)$   
 $f$  convexă pe  $(0, +\infty)$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ ;  $f(1) = -1$ ;  $f(-1) = 3$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\nearrow 3$	$\searrow -1$		$\nearrow$
		max	min		

$\Rightarrow f(x) \leq 3, \forall x \leq 2$

② a)  $F'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = f(x), \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$  este o primitivă a lui  $f$

b)  $\text{aria}(r_f) = \int_1^2 (1 - \frac{1}{x^2}) dx = \int_1^2 (1 - x^{-2}) dx = (x - \frac{x^{-2+1}}{-2+1}) \Big|_1^2 = (x + \frac{1}{x}) \Big|_1^2 = 2 + \frac{1}{2} - 1 - 1 = \frac{1}{2}$

c)  $\int_1^e F(x) \ln x \, dx = \int_1^e (x + \frac{1}{x}) \ln x \, dx = \int_1^e (x \ln x + \frac{1}{x} \ln x) dx = \int_1^e (\frac{x^2}{2})' \ln x \, dx + \int_1^e (\ln x)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e + \frac{\ln x^2}{2} \Big|_1^e =$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} = \frac{e^2 + 3}{4}$

**SUBIECTUL III (30p)**1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ .5p a) Să se calculeze  $f'(1)$ .5p b) Să se determine intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției  $f$ .5p c) Să se arate că  $f(x) \geq 0$ , pentru orice  $x \geq -\frac{1}{2}$ .2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = e^{1-x}$ .5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f$ .5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x \cdot f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .5p c) Să se arate că  $\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx \geq 0$ .

① a)  $f'(x) = 6x^2 - 6x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f'(1) = 0$

b)  $f''(x) = 12x - 6$ ;  $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ;  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	
$f(x)$		$\frac{1}{2}$		

$f$  concavă pe  $(-\infty; \frac{1}{2}]$   
 $f$  convexă pe  $[\frac{1}{2}; +\infty)$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$ ;  $f(0) = 1$ ;  $f(1) = 0$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow 0$		

$A(1, 0)$  punct de minim  $\Rightarrow \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \geq -\frac{1}{2}$

② a)  $\int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$

b)  $h(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^x$ ;  $Aria(\Gamma_h) = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x' \cdot e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = e^x(x-1) \Big|_0^1 = 1$ .

c)  $g(x) - f(x) = e^{1-x} - e^x$   
 $\int_0^{\frac{1}{2}} (e^{1-x} - e^x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx = (-e^{1-x} - e^x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$= (-e^{1-\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}) - (-e^{1-0} - e^0) = -e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}} + e + 1 = e - 2e^{\frac{1}{2}} + 1 = (e^{\frac{1}{2}} - 1)^2 \geq 0$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1;2)$ .

5p c) Să se arate că  $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f_2$ .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se arate că  $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}; x > 0$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = 1; y_0 = f(1) = 2; f'(1) = 0$   
 $y - 2 = 0$  ec. tg. în punctul  $A(1;2)$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1. f(1) = 2$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\rightarrow 2$	$\nearrow$

$\Rightarrow f(x) \geq 2, \forall x \in (0, +\infty)$   
 $2\sqrt{x} - \ln x \geq 2; \forall x > 0$   
 $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x, \forall x > 0$

② a)  $\int f_2(x) dx = \int [x^2 + (1-x)^2] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{(x-1)^3}{3} + C =$   
 $= \frac{x^3 + (-1+x)^3}{3} = \frac{x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{3} + C = \frac{2x^3 - x^2 + x}{3} + C$

b)  $f_2(x) = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1$   
 Aria ( $\Gamma_g$ ) =  $\int_0^1 e^x(2x^2 - 2x + 1) dx = e^x(2x^2 - 2x + 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(4x - 2) dx =$   
 $= e^x(2x^2 - 2x + 1) \Big|_0^1 - e^x(4x - 2) \Big|_0^1 + \int_0^1 4e^x dx = e^x(2x^2 - 2x + 1 - 4x + 2 + 4) \Big|_0^1 =$   
 $= e^x(2x^2 - 6x + 7) \Big|_0^1 = 3e - 7$

c)  $\int_0^1 f_n(x) dx = \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{n+1}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \left( \frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{n+2}$

$\frac{2}{n+1} > \frac{2}{n+2} \Rightarrow \int_0^1 f_n(x) dx > \int_0^1 f_{n+1}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x - \ln x$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty)$ .

5p c) Să se arate că  $f(x) \geq 0$ , oricare ar fi  $x > 0$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = (2-x)^n$ .

5p a) Să se determine  $\int f_1(x) dx$ , unde  $x \in [0, 2]$ .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f_1(x) \cdot e^x$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=2$ .

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f_5$ .

① a)  $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$

b)  $f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} > 0$ ,  $\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  convexă pe  $(0, +\infty)$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$ ;  $\Delta = 9$ ;  $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \frac{-1}{2} < 0$   
 $f(x) = 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$ 0 $\nearrow$ min	

$\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 0$

② a)  $\int f_1(x) dx = \int (2-x) dx = 2x - \frac{x^2}{2} + C$

b)  $\text{Aria}(C_g) = \int_0^2 f_1(x) \cdot e^x dx = \int_0^2 (2-x) e^x dx = (2-x) e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 -1 e^x dx =$   
 $f(x) = 2-x$ ;  $f'(x) = -1$   
 $g(x) = e^x$ ;  $g'(x) = e^x$   
 $= ((2-x)e^x + e^x) \Big|_0^2 = e^x(3-x) \Big|_0^2 =$   
 $= e^2 - 3$

c)  $\text{Vol}(C_{f_5}) = \pi \int_0^2 (2-x)^{10} dx = \pi \int_0^2 (x-2)^{10} dx = \pi \frac{(x-2)^{11}}{11} \Big|_0^2 = \frac{2 \cdot 11 \pi}{11}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $e^x \geq ex$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Fie funcția  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{2}{x}$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) \cdot \ln x \, dx$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \forall x > 0$$

$$\text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow x=0 \text{ asimptota verticală la } G_f$$

$$\text{c) } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x=1; f(1) = e$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow e$ min $\nearrow$		

$$\Rightarrow f(x) \geq e, \forall x > 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x} \geq e, \forall x > 0 \Rightarrow e^x \geq xe, \forall x > 0$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int f(x) dx = \int \left(x + \frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln x + C$$

$$\text{b) } \text{Vol}(C_f) = \pi \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx =$$

$$= \pi \int_1^2 (x^2 + 4 + 4x^{-2}) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{x}\right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{8}{3} + 8 - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} - 4 + 4\right) =$$

$$= \frac{50\pi}{6} = \frac{25\pi}{3}$$

$$\text{c) } \int_1^2 f(x) \cdot \ln x \, dx = \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x}\right) \ln x \, dx = \int_1^2 x \ln x \, dx + 2 \int_1^2 \frac{1}{x} \ln x \, dx =$$

$$= \int_1^2 \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx + 2 \int_1^2 (\ln x)' \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx +$$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$+ 2 \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^2 = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \ln^2 x\right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 + \ln^2 2 + \frac{1}{4} =$$

$$= \ln^2 2 + \ln 4 - \frac{3}{4}$$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $O(0;0)$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$ .

5p a) Să se determine  $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} dx$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f_1$ .

5p c) Folosind, eventual, faptul că  $\sqrt{x+1} \geq 1$ , oricare ar fi  $x \in [0;1]$ , să se arate că  $\int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{1}{2010}$ .

① a)  $f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2 e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); x_0 = 0; y_0 = f(0) = 0; f'(0) = 1$

$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$  ec. tangentei

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2+1)e^x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} - 1 =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow y = -1$  asimptotă orizontală către  $-\infty$  la  $G_f$

② a)  $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, x > 0$

b)  $\text{Vol}(C_{f_1}) = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \pi \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

c)  $\sqrt{x+1} \geq 1, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^{2009}}{\sqrt{x+1}} \leq x^{2009} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2009}}{\sqrt{x+1}} dx \leq \int_0^1 x^{2009} dx \Rightarrow \int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{x^{2010}}{2010} \Big|_0^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot e^x$ .5p a) Să se verifice că  $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției  $f$ .5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n + x + 2}{x+1}$ .5p a) Să se determine  $\int x \cdot f_1(x) dx$ .5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f_2(x) dx$ .5p c) Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției  $f_{2008}$  și axa  $Ox$  și dreptele  $x=0$  și  $x=1$ , este mai mică sau egală cu 2.

① a)  $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2; f(-2) = -2e^{-2}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$-2e^{-2}$	$\smile$

 $f$  - concavă pe  $(-\infty; -2]$  $f$  - convexă pe  $[-2; +\infty)$ 

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow y=0$  asimptotă orizontală către  $-\infty$  la  $G_f$

② a)  $\int x f_1(x) dx = \int \frac{x(2x+2)}{x+1} dx = \int \frac{2x(x+1)}{x+1} dx = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C$

b)  $\int_0^1 f_2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2+x+2}{x+1} dx = \int_0^1 \left[ \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} \right] dx = \int_0^1 \left( x + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 \ln 2$

c)  $x^{2009} \leq x, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^{2009} + x + 2}{x+1} \leq \frac{x+x+2}{x+1}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^{2009} + x + 2}{x+1} \leq 2, \forall x \in [0,1]$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$\text{Aria}(\Gamma_{f_{2009}}) = \int_0^1 \frac{x^{2009} + x + 2}{x+1} dx \leq \int_0^1 2 dx \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_{f_{2009}}) \leq 2x \Big|_0^1 \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_{f_{2009}}) \leq 2$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ , pentru orice  $x > 1$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că  $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1-x$  și  $g(x) = \sqrt{1-x}$ .
- 5p a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .
- 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot \ln x dx$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}; \forall x > 1$

b)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1; y = mx + n; y = x + 1$  asimptota oblică spre  $+\infty$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 < 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}; f(2) = 4$

$x$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		4	

min

$f$  descrescătoare pe  $(1, 2)$

$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} < 2 \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$

② a)  $\int f(x) dx = \int (1-x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C; x \in [0, 1]$

b)  $\text{Aria}(\Gamma_g) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = -\int_0^1 (1-x)^{-1/2} (1-x)^{1/2} dx =$   
 $= -\frac{(1-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \Big|_0^1 = -\frac{(1-x) \cdot \sqrt{1-x}}{3/2} \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (1-x)\sqrt{1-x} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $\int_{\frac{1}{e}}^1 (1-x) \ln x dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 x' \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx =$   
 $= x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 - x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \frac{x^2}{4} \Big|_{\frac{1}{e}}^1 = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2} =$   
 $= \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{e} - \frac{3}{4e^2}$

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că  $f(2008) \geq f(2009)$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .

5p a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + 1}$ ,

axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției

$h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$ , unde  $x \in [0, 1]$ .

$$\textcircled{1} a) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \forall x > 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ asimptotă orizontală către } +\infty \text{ la } G_f$$

$$c) f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e; f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{e}$ max	

$f$  - descrescătoare pe  $(e, +\infty)$   
 $2008 < 2009 \Rightarrow f(2008) \geq f(2009)$

$$\textcircled{2} a) \int f(x) dx = \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$b) g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2+1} = \frac{(\sqrt{x})^2}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}, x \in [0, 1]$$

$$\text{Aria}(T_g) = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$c) h(x) = e^{\frac{x}{2}} f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{x}$$

$$\text{Vol}(C_h) = \pi \int_0^1 h^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^{\frac{x}{2}} \sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x e^x dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x(e^x)' dx = \pi (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = \pi (e^1 - e^1 + e^0) = \pi$$

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că  $f(\sqrt[3]{2009}) \leq f(\sqrt[3]{2010})$ .

2. Fie funcția  $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ .

5p a) Să se determine  $\int f'(x) dx$ .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$ .

5p c) Să se arate că  $\int_1^e x^x f(x) dx \leq e^e - e$ .

$$\textcircled{1} \text{ a) } f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1-2x^3-x^2+2x^2+x-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+x-2x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}; \forall x \in \mathbb{R}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1 \Rightarrow y=1$  asimptotă orizontală către  $+\infty$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ ;  $f(1) = \frac{1}{3}$ ;  $f(-1) = 3$   
 strict crescătoare pe  $(1, +\infty)$   

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow 3$	$\searrow \frac{1}{3}$	$\nearrow$
		max	min	

 $1 < \sqrt[3]{2009} < \sqrt[3]{2010} \Rightarrow f(\sqrt[3]{2009}) \leq f(\sqrt[3]{2010})$

$\textcircled{2} \text{ a) } \int f'(x) dx = f(x) + C = \ln x + C$

b)  $\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e \ln e - e + 1 = e - e + 1 = 1$

c)  $\ln x \leq 1, \forall x \in [1, e] \Rightarrow f(x) \leq 1, \forall x \in [1, e] \Rightarrow e^x f(x) \leq e^x, \forall x \in [1, e]$   
 $\int_1^e e^x f(x) dx \leq \int_1^e e^x dx \Rightarrow \int_1^e e^x f(x) dx \leq e^x \Big|_1^e \Rightarrow$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$$\Rightarrow \int_1^e e^x f(x) dx \leq e^e - e$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ , pentru orice  $x > 1$ .

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(2; e^2)$ .

5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq e^2$ , pentru orice  $x > 1$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_1^4 f_1(x) dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)} dx$ .

5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției

$g: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$ .

① a)  $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ ,  $\forall x > 1$

b)  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ;  $y_0 = f(2) = e^2$ ;  $f'(2) = 0$ ;  $y - e^2 = 0$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(x) \geq e^2$ ,  $\forall x > 1$ .

$x$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\rightarrow e^2$	$\nearrow$

$\frac{1}{2} + 1$      4     min

② a)  $\int_1^4 \sqrt{x+4x} dx = \sqrt{5} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{5} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 =$

$= \frac{2\sqrt{5}}{3} x\sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot 4\sqrt{4} - \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3} (8-1) = \frac{14\sqrt{5}}{3}$

b)  $f_2^2(x) = (\sqrt{x^2+4x})^2 = x^2+4x$

$\int_1^4 \frac{x+2}{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{2x+4}{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{(x^2+4x)'}{x^2+4x} dx =$

$= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x) \Big|_1^4 = \frac{1}{2} \ln 32 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} (\ln 32 - \ln 5) =$   
 $= \frac{1}{2} \ln \frac{32}{5}$

c)  $\text{Vol}(C_{f_2}) = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{f_2(x)}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2+4x} dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{x(x+4)} dx$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} = \frac{x(A+B)+4A}{x(x+4)}$   
 $\text{Vol}(C_{f_2}) = \pi \left( \int_1^4 \frac{1}{x} dx - \int_1^4 \frac{1}{x+4} dx \right) =$

$= \frac{\pi}{4} (\ln x - \ln(x+4)) \Big|_1^4 = \frac{\pi}{4} (\ln 4 - \ln 8 - \ln 1 + \ln 5) =$

$= \frac{\pi}{4} \ln \frac{4 \cdot 5}{8} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{5}{2}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$ .

- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ , pentru orice  $x > 0$ .
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1; 0)$ .
- 5p c) Să se arate că  $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 (x+1) \cdot f(x) dx$ .
- 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p c) Folosind faptul că  $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ , să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ , este un număr din intervalul  $[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}]$ .

1 a)  $f'(x) = (x + 2 - 3x^{\frac{1}{3}})' = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = 1 - x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ,  $\forall x > 0$

b)  $y - y_0 = m(x - x_0)$   
 $y_0 = f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$ ;  $m = f'(1) = 1 - 1 = 0$   
 $y - 0 = 0(x - 1)$ ;  $y = 0$  ec. tg la  $G_f$  în  $A(1, 0)$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow x = 1$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	/	- 0 +	
$f(x)$	/	$\searrow 0 \nearrow$	min

$f(x) \geq 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow x + 2 - 3\sqrt[3]{x} \geq 0, \forall x > 0$

2 a)  $\int_0^1 (x+1) \cdot \frac{x^3}{x+1} dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

b)  $\text{aria}(\Gamma_f) = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}) dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{5}{6} - \ln 2$

c)  $1 \leq (1+x)^2 \leq 4, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \frac{x^6}{4} \leq (\frac{x^3}{1+x})^2 \leq \frac{x^6}{1}, \forall x \in [0, 1]$   
 $\text{Vol}(C_f) = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (\frac{x^3}{1+x})^2 dx$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

$\pi \int_0^1 \frac{x^6}{4} dx \leq \pi \int_0^1 (\frac{x^3}{1+x})^2 dx \leq \pi \int_0^1 \frac{x^6}{1} dx$

$\pi \frac{x^7}{4 \cdot 7} \Big|_0^1 \leq \text{Vol}(C_f) \leq \pi \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{\pi}{28} \leq \text{Vol}(C_f) \leq \frac{\pi}{7} \Rightarrow \text{Vol}(C_f) \in [\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}]$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty)$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră funcțiile  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$ .

5p a) Să se determine  $\int_0^1 f_0(x) \cdot e^{-x} dx$ .

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f_1$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p c) Să se arate că  $\int_0^1 f_{2008}(x) dx + \int_0^1 f_{2010}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2009}(x) dx$ .

① a)  $f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x > 0$

b)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$y = mx + n; \quad y = x - \text{as. oblică spre } +\infty$

c)  $f''(x) = \left( \frac{x^2-1}{x^2} \right)' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} > 0, \forall x > 0$

$f''(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  convexă pe  $(0, +\infty)$

② a)  $\int_0^1 f_0(x) e^{-x} dx = \int_0^1 (x^{0+1} + 1) e^x \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$

b)  $f_1(x) = (x^2+1)e^x, x \in [0, 1]$

aria  $(\Gamma_{f_1}) = \int_0^1 (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$

$f(x) = x^2+1, f'(x) = 2x$

$g'(x) = e^x, g(x) = e^x$

$\int_0^1 2xe^x dx = 2xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = 2xe^x \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1$

$f(x) = 2x, f'(x) = 2$

$g'(x) = e^x, g(x) = e^x$

aria  $(\Gamma_{f_1}) = e^x(x^2+1-2x+2) \Big|_0^1 = e^x(x^2-2x+3) \Big|_0^1 = 2e-3$

BACALAUREAT 2009-MATEMATICĂ - Proba D, MT2, programa M2

c)  $f_{2008}(x) + f_{2010}(x) - 2f_{2009}(x) = (x^{2009} + 1)e^x + (x^{2011} + 1)e^x - 2(x^{2009} + 1)e^x = e^x(x^{2009} - 2x^{2010} + x^{2011}) = e^x \cdot x^{2009}(1 - 2x + x^2) = e^x \cdot x^{2009}(1-x)^2 \geq 0, \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow \int_0^1 f_{2008}(x) dx + \int_0^1 f_{2010}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2009}(x) dx$